



Marie Budíková
Maria Králová
Bohumil Maroš

Průvodce základními statistickými metodami



- Jak se orientovat v datových souborech pomocí tabulek a grafů
- Jak pochopit zákonitosti matematiky náhody
- Posuzování rozdílnosti několika souborů
- Modelování závislostí pomocí regrese
- Jak získat z dat nápady ke zlepšení chodu firmy
- Řešení praktických úloh s využitím softwaru STATISTICA a MINITAB

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

Používání elektronické verze knihy je umožněno jen osobě, která ji legálně nabyla a jen pro její osobní a vnitřní potřeby v rozsahu stanoveném autorským zákonem. Elektronická kniha je datový soubor, který lze užívat pouze v takové formě, v jaké jej lze stáhnout s portálu. Jakékoliv neoprávněné užití elektronické knihy nebo její části, spočívající např. v kopírování, úpravách, prodeji, pronajímání, půjčování, sdělování veřejnosti nebo jakémkoliv druhu obchodování nebo neobchodního šíření je zakázáno! Zejména je zakázána jakákoliv konverze datového souboru nebo extrakce části nebo celého textu, umísťování textu na servery, ze kterých je možno tento soubor dále stahovat, přitom není rozhodující, kdo takovéto sdílení umožnil. Je zakázáno sdělování údajů o uživatelském účtu jiným osobám, zasahování do technických prostředků, které chrání elektronickou knihu, případně omezují rozsah jejího užití. Uživatel také není oprávněn jakkoliv testovat, zkoušet či obcházet technické zabezpečení elektronické knihy.





Copyright © Grada Publishing, a.s.

RNDr. Marie Budíková, Dr.,
Mgr. Maria Králová, Ph.D.,
Doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc.

Průvodce základními statistickými metodami

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 4147. publikaci

Autorský kolektiv:

RNDr. Marie Budíková, Dr. – kapitoly 1, 2, 3, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18
Mgr. Maria Králová, Ph.D. – kapitoly 4, 5, 6, 7, 9, 10
Doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc. – kapitoly 11, 12, 19, 20, 21

Odborná recenzentka:

Doc. Ing. Eva Jarošová, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi
Sazba Mgr. David Hampel, Ph.D.
Počet stran 272
První vydání, Praha 2010
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.
Husova ulice 1881, Havlíčkův Brod

© Grada Publishing, a.s., 2010
Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-3243-5 (tištěná verze)

ISBN 978-80-247-7511-1 (elektronická verze ve formátu PDF) © Grada Publishing, a.s. 2012

Upozornění

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být reprodukována a používána v elektronické podobě, kopírována a nahrávána bez předchozího písemného souhlasu nakladatele.

Obsah

O autorech	9
Úvodní slovo recenzenta	10
Předmluva/Summary	11
Úvod	12
1 Základní, výběrový a datový soubor	13
1.1 Základní a výběrový soubor, absolutní a relativní četnost množiny	13
1.2 Vlastnosti relativní četnosti	14
1.3 Podmíněná relativní četnost	15
1.4 Četnostní nezávislost dvou množin v daném výběrovém souboru	16
1.5 Skalární a vektorový znak	16
1.6 Datový soubor	16
1.7 Jev a jeho absolutní a relativní četnost	18
2 Bodové a intervalové rozložení četností	21
2.1 Jednorozměrné bodové rozložení četností	21
2.2 Dvourozměrné bodové rozložení četností	24
2.3 Jednorozměrné intervalové rozložení četností	28
2.4 Dvourozměrné intervalové rozložení četností	33
2.5 Dvourozměrný tečkový diagram	36
3 Číselné charakteristiky znaků	39
3.1 Typy znaků	39
3.2 Číselné charakteristiky nominálních znaků	40
3.3 Číselné charakteristiky ordinálních znaků	41
3.4 Číselné charakteristiky intervalových znaků	42
3.5 Charakteristiky poměrových znaků	46
3.6 Vážené číselné charakteristiky	47
3.7 Početní pravidla pro číselné charakteristiky	48
4 Náhodné jevy a jejich pravděpodobnosti	51
4.1 Náhodné jevy	51
4.2 Pravděpodobnost	53

5	Stochasticky nezávislé jevy a podmíněná pravděpodobnost	59
5.1	Nezávislé jevy	59
5.2	Podmíněná pravděpodobnost	60
6	Náhodné veličiny	69
7	Náhodné vektory	81
8	Vybraná rozložení diskrétních a spojitých náhodných veličin	89
8.1	Alternativní rozložení	89
8.2	Binomické rozložení	90
8.3	Geometrické rozložení	92
8.4	Hypergeometrické rozložení	94
8.5	Poissonovo rozložení	95
8.6	Rovnoměrné diskrétní rozložení	96
8.7	Rovnoměrné spojité rozložení	96
8.8	Exponenciální rozložení	97
8.9	Normální rozložení	98
8.10	Dvourozměrné normální rozložení	99
8.11	Pearsonovo rozložení	101
8.12	Studentovo rozložení	101
8.13	Fisherovo-Snedecorovo	101
9	Číselné charakteristiky náhodných veličin	105
10	Slabý zákon velkých čísel a centrální limitní věta	121
11	Základní pojmy matematické statistiky	127
11.1	Pojem náhodného výběru	127
11.2	Pojem statistiky, příklady důležitých statistik	127
11.3	Bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí	129
11.4	Typy bodových odhadů	129
11.5	Vlastnosti důležitých statistik	130
11.6	Pojem intervalu spolehlivosti	131
11.7	Postup při konstrukci intervalu spolehlivosti	131
11.8	Šířka intervalu spolehlivosti	132
11.9	Význam testování statistických hypotéz	133
11.10	Statistická hypotéza	133
11.11	Test statistické hypotézy	134
11.12	Nulová a alternativní hypotéza	134
11.13	Doporučený postup při testování statistických hypotéz pomocí kritického oboru	134
11.14	Chyba 1. a 2. druhu	136
11.15	Ilustrace vztahu mezi chybou 1. a 2. druhu	137
11.16	Testování pomocí intervalu spolehlivosti	137
11.17	Testování pomocí p-hodnoty	138
12	Grafická analýza a testy normality	141
12.1	Průběhový diagram	141
12.2	Histogram	144
12.3	Krabicový diagram (BoxPlot)	148

12.4	Motivace pro testování normality	150
12.5	Princip a provedení testů normality	151
13	Úlohy o jednom a dvou nezávislých náhodných výběrech z normálního rozložení	157
13.1	Rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a výběrového rozptylu	157
13.2	Intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl	158
13.3	Typy testů pro parametry normálního rozložení	159
13.4	Náhodný výběr z dvourozměrného rozložení	162
13.5	Rozložení statistik odvozených z výběrových průměrů a výběrových rozptylů	163
13.6	Interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot a podíl rozptylů	163
13.7	Typy testů pro rozdíl středních hodnot a podíl rozptylů	166
13.8	Cohenův koeficient věcného účinku	167
14	Úlohy o jednom a dvou nezávislých náhodných výběrech z alternativního rozložení	171
14.1	Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru	172
14.2	Asymptotický interval spolehlivosti pro parametr alternativního rozložení	172
14.3	Testování hypotézy o parametru alternativního rozložení	173
14.4	Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů	175
14.5	Asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů dvou alternativních rozložení	175
14.6	Testování hypotézy o rozdílu parametrů dvou alternativních rozložení	176
14.7	Postup při testování hypotézy o rozdílu parametrů dvou alternativních rozložení	176
15	Jednofaktorová analýza rozptylu	181
15.1	Předpoklady a označení	181
15.2	Matematický model	182
15.3	Testování hypotézy o shodě středních hodnot	183
15.4	Testování hypotézy o shodě rozptylů	184
15.5	Post-hoc (následné) metody mnohonásobného porovnávání	185
15.6	Doporučený postup při provádění analýzy rozptylu	186
16	Neparametrické testy o mediánech	193
16.1	Pojem pořadí a průměrného pořadí	193
16.2	Jednovýběrový a párový znaménkový test a jeho asymptotická varianta	194
16.3	Jednovýběrový a párový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta	196
16.4	Dvouvýběrový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta	198
16.5	Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test	199
16.6	Kruskalův-Wallisův test a mediánový test	201
16.7	Metody mnohonásobného porovnávání	201
17	Porovnání empirického a teoretického rozložení	205
17.1	Testy dobré shody pro diskrétní a spojitě rozložení	205
17.2	Jednoduchý test exponenciálního rozložení	210
17.3	Jednoduchý test Poissonova rozložení	210

18	Analýza závislosti veličin nominálního a ordinálního typu	213
18.1	Kontingenční tabulka	213
18.2	Testování hypotézy o nezávislosti	214
18.3	Měření síly závislosti	214
18.4	Čtyřpolní kontingenční tabulka	217
18.5	Asymptotický a přesný test nezávislosti ve čtyřpolní tabulce	217
18.6	Podíl šancí ve čtyřpolní kontingenční tabulce	218
18.7	Testování nezávislosti ve čtyřpolních tabulkách pomocí podílu šancí	219
18.8	Spearmanův koeficient pořadové korelace	220
18.9	Vlastnosti Spearmanova koeficientu pořadové korelace	220
18.10	Testování pořadové nezávislosti ordinálních veličin	221
18.11	Asymptotické varianty testu	221
19	Jednoduchá korelační analýza	225
19.1	Kovariance dvou náhodných veličin a její odhad	225
19.2	Koeficient korelace a jeho odhad	227
19.3	Koeficient korelace dvourozměrného normálního rozložení	228
19.4	Test hypotézy o nezávislosti	228
19.5	Interval spolehlivosti pro koeficient korelace	229
19.6	Porovnání dvou korelačních koeficientů	230
20	Úvod do regresní analýzy	233
20.1	Zavedení lineárního modelu	233
20.2	Metoda nejmenších čtverců pro neopakovaná a opakovaná měření	234
20.3	Interval spolehlivosti pro regresní parametr	236
20.4	Testování hypotézy o shodě regresního parametru s předem daným číslem	236
20.5	Testování hypotézy o nevýznamnosti všech prediktorů v modelu (celkový F-test)	239
20.6	Adekvátnost modelu	241
20.7	Interval spolehlivosti pro podmíněnou střední hodnotu	245
20.8	Predikční interval spolehlivosti	247
20.9	Analýza reziduí	249
20.10	Index determinace	253
21	Časové řady	259
21.1	Pojem časové řady	259
21.2	Popisné charakteristiky časové řady	261
21.3	Dynamické charakteristiky časové řady	262
21.4	Vyhlazení časové řady pomocí klouzavých průměrů	264
	Literatura	269
	Rejstřík	270

O autorech

RNDr. Marie Budíková, Dr.

Působí jako lektorka Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Má dlouholeté zkušenosti s výukou předmětů zaměřených na pravděpodobnost a statistiku, a to nejen pro studenty Přírodovědecké fakulty, ale též Ekonomicko-správní fakulty, Fakulty informatiky a Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Od 90. let využívá při výuce statistické programové systémy SPSS a STATISTICA. Specializuje se na využití statistických metod v praxi, především v klimatologii, hydrologii, medicíně a psychologii. V současnosti úzce spolupracuje s brněnskými klimatology, kteří zkoumají polární klima na stanici J. G. Mendela v Antarktidě. Je autorkou či spoluautorkou více než 70 vědeckých a odborných článků, publikací a učebních textů. Řadu let působí ve výboru České statistické společnosti.



Mgr. Maria Králová, Ph.D.

V roce 1996 absolvovala Přírodovědeckou fakultu MU v Brně, obor matematika-biologie. Postgraduální studium ukončila v roce 2003 disertační prací Markovské modely pozornosti. Ve své výzkumné činnosti se zaměřuje zejména na stochastické modelování v psychologii, je spoluřešitelkou Výzkumného záměru MŠMT ČR CEZ: J22/98:261100009. V pedagogické praxi se věnuje především základním kurzům pravděpodobnosti a matematické statistiky, působí na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Je členkou České statistické společnosti.

Doc. RNDr. Bohumil Maroš, CSc.

Jako vysokoškolský učitel působí více než 45 let na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Vyučuje zde základní i pokročilé metody statistického přístupu k řešení problémů. Více než 30 let se zabývá problematikou statistického zpracování dat a matematického modelování procesů. Úspěšně propaguje metody Design of Experiments nejen ve výuce, ale i v praxi pro výrobní podniky či organizace poskytující služby. Je externím spolupracovníkem společností SC&C Partner, která se specializuje na zlepšování jakosti výroby či služeb pomocí metody Six Sigma. Je autorem či spoluautorem více než 60 vědeckých publikací, 8 výzkumných zpráv, 6 knih, 6 skript. Je členem České statistické společnosti.



Úvodní slovo recenzenta

V knize jsou shrnuty základní vzorce a postupy z popisné statistiky, počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. Moderní pojetí statistiky předpokládá zpracovávání výběrových šetření nebo experimentálních dat, a proto je větší pozornost věnována počtu pravděpodobnosti a matematické statistice, která z něho vychází. Kniha obsahuje 21 kapitol, které je možné rozdělit na tři části. První tři kapitoly se zabývají převážně popisnou statistikou, ve čtvrté až desáté kapitole jsou vysvětleny základy počtu pravděpodobnosti a zbývajících jedenáct kapitol je věnováno matematické statistice. K ilustraci postupů slouží řešené příklady, pro procvičení látky jsou zařazeny další úlohy s uvedeným řešením. Řada příkladů obsahuje návod k obsluze statistického systému STATISTICA, v některých případech také systému MINITAB.

I když lze zjednodušeně říci, že většina metod se vyučuje v základních kurzech statistiky na různých vysokých školách nematematického zaměření, při bližším prostudování je zřejmé, že zvláště počet zařazených statistických testů společný základ přesahuje. Jako příklad testů, které nebývají zcela běžně v základní literatuře, můžeme uvést metody mnohonásobného porovnávání, speciální testy normality nebo shody s exponenciálním či Poissonovým rozdělením, testy pro čtyřpolní tabulky nebo některé testy o korelačních koeficientech.

Věřím, že Průvodce základními statistickými metodami využijí nejen studenti Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity, jimž je kniha určena především, ale i řada dalších uživatelů statistických metod, a to zvláště ti, kteří pracují s některým ze statistických systémů STATISTICA nebo MINITAB.

doc. Ing. Eva Jarošová, CSc.

Katedra statistiky a pravděpodobnosti

Fakulta informatiky a statistiky

Vysoká škola ekonomická v Praze

Předmluva

Učebnice „Průvodce základními statistickými metodami“ je primárně určena posluchačům Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity v Brně a má sloužit jako základní studijní literatura předmětů Statistika 1 a Statistika 2. Poučení v ní však samozřejmě najdou i posluchači jiných studijních zaměření či uživatelé statistiky v praxi, kteří potřebují provádět analýzu dat.

Autoři předpokládají, že čtenář je obeznámen se základy maticového počtu, diferenciálního a integrálního počtu a má zkušenosti s používáním tabulkového kalkulátoru.

Knihu tvoří 21 kapitol, z nichž první tři se zabývají popisnou statistikou, dalších sedm počtem pravděpodobnosti a zbývajících jedenáct pak matematickou statistikou. Partie, které se týkají popisné statistiky a počtu pravděpodobnosti, jsou probírány v předmětu Statistika 1, matematická statistika pak tvoří náplň předmětu Statistika 2.

Každá z kapitol zavádí základní pojmy statistické či pravděpodobnostní teorie a objasňuje je na praktických příkladech. Kapitoly z popisné a matematické statistiky rovněž obsahují návody na řešení příkladů pomocí statistického softwaru, konkrétně pomocí systému STATISTICA, v některých kapitolách je rovněž použit systém MINITAB, který se na některých vysokých školách technického zaměření používá jako základní statistický softwarový nástroj. Výsledné tabulky a grafy jsou podrobně komentovány. Své znalosti si může čtenář ověřit na příkladech určených k samostatnému řešení. Datové soubory k jednotlivým příkladům a statistické tabulky najdete na adrese www.math.muni.cz/~budikova.

Autoři si jsou vědomi toho, že v jediné nepříliš rozsáhlé učebnici nelze vysvětlit všechny důležité a v praxi často používané statistické metody, ani se podrobněji zabývat jejich zajímavými aspekty. Proto uvažují o vytvoření druhého dílu této učebnice, který by sloužil jako průvodce pokročilejšími statistickými metodami.

Summary

This easy-to-follow publication containing many examples and case studies aims primarily at students of economics and professionals in economics and engineering. The readers will familiarize themselves with essential statistical techniques and practical applications of statistics. The book is divided into three parts. The first part deals with descriptive statistics, the second one treats the basic concepts of the probability theory and the third part looks at the selected methods of inductive statistics.

Each topic is introduced by a brief theoretical introduction followed by sample exercises and a set of tasks for self-study. It is sample tasks from economic and technical practice accompanied by the answer key that are the focal point of this publication. Careful attention is paid to verification of underlying assumptions of statistical techniques and to detailed interpretation of results. This book demonstrates solutions to problems using the STATISTICA (version 9) and MINITAB (version 15) computer software. Task solutions are supplemented by both detailed comments on computer outputs and instructions how to reach them.

Úvod

Teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína (budovaná axiomaticky), která se zabývá studiem zákonitostí v náhodných pokusech a jejich modelováním matematickými prostředky. Pod pojmem náhoda rozumíme působení faktorů, které se živelně mění při různých provedeních téhož pokusu. (Je to „matematika náhody“.)

Popisná statistika

Popisná statistika je disciplína, která popisuje a sumarizuje informace obsažené ve velkém množství dat pomocí tabulek, grafů, funkcionálních a číselných charakteristik. Činí tak pomocí základních matematických operací. Cílem je zpřehlednit informace „ukryté“ v datových souborech.

Matematická statistika

Matematická statistika je věda, která buduje metody pro analýzu dat a využívá při tom princip statistické indukce. (Informace získané z náhodného výběru zobecňuje na základní soubor.) Její součástí je teorie odhadu, testování statistických hypotéz, statistická predikce.

Kapitola 1

Základní, výběrový a datový soubor

Předmětem statistického zájmu není jednotlivý objekt, nýbrž soubor objektů, které tvoří základní soubor. Zpravidla není možné vyšetřovat všechny objekty, ale jenom určitý omezený počet objektů, které považujeme za výběrový soubor.

Prvky základního souboru, které vykazují určitou společnou vlastnost, tvoří množinu. Statistik zkoumá absolutní a relativní četnost prvků této množiny v daném výběrovém souboru.

Zajímají-li nás ve výběrovém souboru dvě množiny, můžeme zkoumat výskyt objektů z jedné množiny mezi objekty pocházejícími z druhé množiny. Tím dospíváme k pojmu podmíněné relativní četnosti. Rovněž lze ověřovat četnostní nezávislost těchto dvou množin v daném výběrovém souboru. Četnostní nezávislost vlastně znamená, že informace, které máme o původu objektu z jedné množiny, nijak nemění naše očekávání o původu objektu z druhé množiny.

Každému objektu základního souboru lze pomocí funkce zvané znak přiřadit číslo (nebo i více čísel). Pod těmito čísly se mohou skrývat i slovní popisy, např. hodnota 1 pro znak „rodinný stav“ znamená „svobodný“, hodnota 2 „ženy“ apod. Pokud hodnoty znaků pro objekty daného výběrového souboru uspořádáme do matice tak, že řádky odpovídají jednotlivým objektům a sloupce znakům, dostaneme datový soubor. Libovolný sloupec této matice tvoří jednorozměrný datový soubor, který můžeme uspořádat podle velikosti a vytvořit tak uspořádaný datový soubor, nebo z něj lze získat vektor variant.

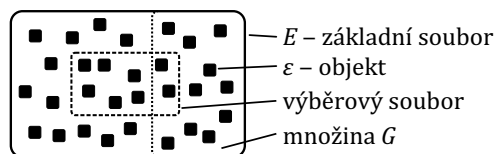
Jevem rozumíme tu skutečnost, že znak nabyl hodnoty z nějaké číselné množiny. Můžeme zkoumat absolutní a relativní četnost jevu v daném výběrovém souboru.

1.1 Základní a výběrový soubor, absolutní a relativní četnost množiny

Základním souborem rozumíme libovolnou neprázdnou množinu E . Prvky množiny E značíme ε a nazýváme je objekty. Libovolnou neprázdnou podmnožinu $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ základního souboru E nazýváme výběrový soubor rozsahu n . Je-li množina $G \subseteq E$, pak symbolem $N(G)$ rozumíme absolutní četnost množiny G ve výběrovém souboru, tj. počet těch objektů

množiny G , které patří do výběrového souboru. Relativní četnost množiny G ve výběrovém souboru zavedeme vztahem $p(G) = \frac{N(G)}{n}$.

Výběrový soubor by měl být reprezentativním obrazem základního souboru. Toho lze docílit např. tak, že objekty ze základního souboru vybíráme do výběrového souboru losováním. Výběrový soubor je ilustrován na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Ilustrace výběrového souboru.

Příklad 1.1. Základním souborem E je množina všech žáků 9. ročníků základních škol. Množina G_1 je tvořena těmi žáky, kteří v pololetí 9. třídy uspěli v předmětu fyzika a množina G_2 obsahuje ty žáky, kteří v pololetí 9. třídy uspěli v předmětu chemie. Ze základního souboru bylo náhodně vybráno 30 žáků, kteří tvoří výběrový soubor $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{30}\}$. Z těchto 30 žáků 28 uspělo ve fyzice, 27 v chemii a 25 v obou předmětech. Zapište absolutní a relativní četnosti žáků úspěšných ve fyzice, v chemii a oboustranně úspěšných žáků.

Řešení

Spočetli jsme $N(G_1) = 28$, $N(G_2) = 27$, $N(G_1 \cap G_2) = 25$, $n = 30$, $p(G_1) = \frac{28}{30} = 0,9\bar{3}$, $p(G_2) = \frac{27}{30} = 0,9$, $p(G_1 \cap G_2) = \frac{25}{30} = 0,8\bar{3}$. Vidíme, že ve výběrovém souboru je 93,3 % žáků úspěšných ve fyzice, 90 % v chemii a oboustranně úspěšných žáků je 83,3 %. $\square$

1.2 Vlastnosti relativní četnosti

Relativní četnost má následujících 12 vlastností, které jsou obdobné vlastnostem procent.

1. $p(\emptyset) = 0$,
2. $p(G) \geq 0$ (nezápornost),
3. $p(G_1 \cup G_2) + p(G_1 \cap G_2) = p(G_1) + p(G_2)$,
4. $1 + p(G_1 \cap G_2) \geq p(G_1) + p(G_2)$,
5. $p(G_1 \cup G_2) \leq p(G_1) + p(G_2)$ (subaditivita),
6. $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow p(G_1 \cup G_2) = p(G_1) + p(G_2)$ (aditivita),
7. $p(G_2 \setminus G_1) = p(G_2) - p(G_1 \cap G_2)$,
8. $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow p(G_2 \setminus G_1) = p(G_2) - p(G_1)$ (subtraktivita),
9. $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow p(G_1) \leq p(G_2)$ (monotonie),
10. $p(E) = 1$ (normovanost),

$$11. \quad p(G) + p(G') = 1 \text{ (komplementarita),}$$

$$12. \quad p(G) \leq 1.$$

Pokud se v daném základním souboru zajímáme o dvě podmnožiny objektů, můžeme zavést pojem podmíněné relativní četnosti jedné podmnožiny v daném výběrovém souboru za předpokladu, že objekt pochází z druhé podmnožiny. V příkladu 1.2 vypočteme podmíněné relativní četnosti žáků úspěšných ve fyzice mezi žáky úspěšnými v chemii a naopak.

1.3 Podmíněná relativní četnost

Nechť E je základní soubor, G_1, G_2 jeho podmnožiny, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ výběrový soubor. Podmíněná relativní četnost množiny G_1 ve výběrovém souboru za podmínky G_2 je zavedena vztahem

$$p(G_1 | G_2) = \frac{N(G_1 \cap G_2)}{N(G_2)} = \frac{p(G_1 \cap G_2)}{p(G_2)}$$

a podmíněná relativní četnost G_2 ve výběrovém souboru za podmínky G_1 vztahem

$$p(G_2 | G_1) = \frac{N(G_1 \cap G_2)}{N(G_1)} = \frac{p(G_1 \cap G_2)}{p(G_1)}.$$

Příklad 1.2. Pro údaje z příkladu 1.1 vypočítejte podmíněnou relativní četnost žáků úspěšných ve fyzice mezi žáky úspěšnými v chemii a podmíněnou relativní četnost žáků úspěšných v chemii mezi žáky úspěšnými ve fyzice.

Řešení

Spočetli jsme

$$p(G_1 | G_2) = \frac{N(G_1 \cap G_2)}{N(G_2)} = \frac{25}{27} = 0,926.$$

Znamená to, že 92,6 % těch žáků, kteří byli úspěšní v chemii, uspělo i ve fyzice. Dále jsme spočetli

$$p(G_2 | G_1) = \frac{N(G_1 \cap G_2)}{N(G_1)} = \frac{25}{28} = 0,893,$$

což znamená, že 89,3 % těch žáků, kteří byli úspěšní ve fyzice, uspělo i v chemii.

Obvykle se u žáků sdružuje úspěch ve fyzice s úspěchem v chemii a podobně neúspěch ve fyzice s neúspěchem v chemii, neboť osobní nadání a schopnosti působí v těchto dvou přírodovědných předmětech stejným směrem. $\square$

V jaké situaci budeme hovořit o četnostní nezávislosti obou úspěchů? Zřejmě tehdy, když podíl žáků úspěšných ve fyzice (resp. chemii) mezi žáky úspěšnými v chemii (resp. fyzice) bude stejný jako podíl těchto žáků mezi všemi žáky ve výběrovém souboru. Požadujeme tedy, aby $p(G_2 | G_1) = p(G_2)$ a současně $p(G_1 | G_2) = p(G_1)$. Oba tyto požadavky jsou ekvivalentní s multiplikativním vztahem

$$p(G_1 \cap G_2) = p(G_1) \cdot p(G_2),$$

který slouží k definování četnostní nezávislosti dvou množin v daném výběrovém souboru.

1.4 Četnostní nezávislost dvou množin v daném výběrovém souboru

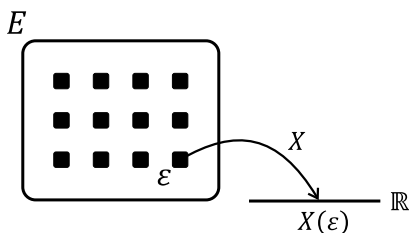
Množiny $G_1 \subseteq E$, $G_2 \subseteq E$ jsou četnostně nezávislé ve výběrovém souboru $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, jestliže platí multiplikativní vztah $p(G_1 \cap G_2) = p(G_1) \cdot p(G_2)$.

Informace o původu objektu z jedné množiny nijak neovlivňují naše očekávání, s nímž usuzujeme na jeho původ z druhé množiny. V našem příkladě se žáky tento multiplikativní vztah splněn není, neboť $\frac{25}{30} = 0,8\bar{3} \neq \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{30} = 0,84$.

Nyní každý objekt základního souboru ohodnotíme jedním nebo více čísly pomocí funkce, která se nazývá znak. Čísla, která se vztahují pouze k objektům výběrového souboru, sestavíme do matice zvané datový soubor.

1.5 Skalární a vektorový znak

Funkce $X : E \rightarrow \mathbb{R}$, $Y : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\dots$, $Z : E \rightarrow \mathbb{R}$, které každému objektu přiřazují číslo, se nazývají (skalární) znaky (ilustrace viz obrázek 1.2). Uspořádaná p -tice $(X, Y, \dots, Z)$ se nazývá vektorový znak.



Obrázek 1.2: Ilustrace skalárního znaku.

1.6 Datový soubor

Je-li dán výběrový soubor $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subseteq E$, pak hodnoty znaků $X, Y, \dots, Z$ pro i -tý objekt označíme $x_i = X(\varepsilon_i)$, $y_i = Y(\varepsilon_i)$, $\dots$, $z_i = Z(\varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, n$. Matice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

typu $n \times p$ se nazývá datový soubor. Její řádky odpovídají jednotlivým objektům, sloupce znakům. Libovolný sloupec této matice nazýváme jednorozměrný datový soubor. Uspořádané

hodnoty např. znaku X : $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ tvoří uspořádaný datový soubor

$$\begin{pmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Vektor

$$\begin{pmatrix} x_{[1]} \\ \vdots \\ x_{[r]} \end{pmatrix},$$

kde $x_{[1]} < \dots < x_{[r]}$, $r \leq n$, jsou navzájem různé hodnoty znaku X , se nazývá vektor variant. Pozor – je důležité rozlišovat, zda je index bez závorečky, v kulaté závorce či hranaté závorce!

Příklad 1.3. Pro žáky z výběrového souboru rozsahu 30 uvedeného v příkladu 1.1 byly zjišťovány hodnoty znaků X – známka z fyziky v pololetí, Y – známka z chemie v pololetí, Z – pohlaví žáka (0 ... dívka, 1 ... hoch). Byl získán datový soubor (z důvodu úspory místa je matice typu 30×3 rozdělena na tři části).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Utvořte jednorozměrný datový soubor pro znak X , vektory variant pro znaky X a Z a najděte x_2 , $x_{(2)}$, $x_{[2]}$.

Řešení

Jednorozměrný datový soubor pro znak X je sloupcový vektor o 30 řádcích. Opět z důvodu úspory místa ho napíšeme jako transponovaný řádkový vektor

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5)'.$$

Vektor variant pro znak X je $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, pro znak Z $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dále $x_2 = 2$, $x_{(2)} = 1$, $x_{[2]} = 2$.

□

1.7 Jev a jeho absolutní a relativní četnost

Jevem rozumíme skutečnost, že znak X nabyl hodnoty z číselné množiny B (formálně píšeme $\{X \in B\}$) resp. znaky $X, Y, \dots, Z$ současně nabývaly hodnot z číselných množin $B_1, \dots, B_p$ (píšeme $\{X \in B_1 \wedge Y \in B_2 \wedge \dots \wedge Z \in B_p\}$).

Je-li $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ výběrový soubor, pak zavedeme absolutní četnost jevu $\{X \in B\}$ ve výběrovém souboru (značíme ji $N(X \in B)$) jako počet těch objektů ve výběrovém souboru, pro něž znak $X \in B$. Relativní četnost jevu $\{X \in B\}$ ve výběrovém souboru je pak podíl absolutní četnosti a rozsahu souboru, tj.

$$p(X \in B) = \frac{N(X \in B)}{n}.$$

Analogicky $N(X \in B_1 \wedge Y \in B_2 \wedge \dots \wedge Z \in B_p)$ resp. $p(X \in B_1 \wedge Y \in B_2 \wedge \dots \wedge Z \in B_p)$ znamená absolutní resp. relativní četnost jevu $\{X \in B_1 \wedge Y \in B_2 \wedge \dots \wedge Z \in B_p\}$ ve výběrovém souboru.

Např. pro datový soubor z příkladu 1.3 vyjádříme absolutní četnost dívek, které mají z obou sledovaných předmětů jedničku nebo dvojku, následovně: $N(X \leq 2 \wedge Y \leq 2 \wedge Z = 0) = 6$. Nebo relativní četnost žáků, kteří propadají z fyziky, pak můžeme vyjádřit takto: $p(X = 5) = \frac{2}{30} = 0,0\bar{6}$.

Příklady k samostatnému řešení

1.A Nechť množiny G_1, G_2 jsou neslučitelné, relativní četnost množiny G_1 je 0,15, relativní četnost sjednocení množin G_1, G_2 je 0,8. Vypočtěte relativní četnost množiny G_2 .

$$[p(G_2) = p(G_1 \cup G_2) - p(G_1) = 0,8 - 0,15 = 0,65]$$

1.B Nechť množina G_1 je podmnožinou množiny G_2 a její relativní četnost je 0,33. Relativní četnost rozdílu množin $G_2 \setminus G_1$ je 0,15. Vypočtěte relativní četnost množiny G_2 .

$$[p(G_2) = p(G_2 \setminus G_1) + p(G_1) = 0,15 + 0,33 = 0,48]$$

1.C Nechť relativní četnost rozdílu množin $G_1 \setminus G_2$ je 0,36 a relativní četnost jejich průniku je 0,12. Vypočtěte relativní četnost množiny G_1 .

$$[p(G_1) = p(G_1 \setminus G_2) + p(G_1 \cap G_2) = 0,36 + 0,12 = 0,48]$$

1.D Je dán dvourozměrný datový soubor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znak X (levý sloupec) znamená počet členů domácnosti a znak Y (pravý sloupec) počet dětí do 15 let v této domácnosti.

- a) Utvořte uspořádané datové soubory pro znaky X a Y .
- b) Najděte vektory variant znaků X a Y .
- c) Vypočtěte relativní četnost tříčlenných domácností.
- d) Vypočtěte relativní četnost nejvýše tříčlenných domácností.
- e) Vypočtěte relativní četnost bezdětných domácností.
- f) Vypočtěte relativní četnost dvoučlenných bezdětných domácností.
- g) Vypočtěte podmíněnou relativní četnost dvoučlenných bezdětných domácností.

[Ad a), uspořádané datové soubory:

$$\begin{aligned} \text{pro } X: & (1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5)', \\ \text{pro } Y: & (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3)'. \end{aligned}$$

Ad b), vektor variant pro znak X : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, pro znak Y : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ad c), relativní četnost tříčlenných domácností je 0,2. Ad d), relativní četnost nejvýše tříčlenných domácností je 0,6. Ad e), relativní četnost bezdětných domácností je 0,3. Ad f), relativní četnost dvoučlenných domácností je 0,3. Ad g), podmíněná relativní četnost těch dvoučlenných domácností, které jsou bezdětné, je 0,6.]

Kapitola 2

Bodové a intervalové rozložení četností

Informace obsažené v datovém souboru můžeme zpřehlednit pomocí tabulek a grafů. V této kapitole si ukážeme způsoby tabulkového a grafického zpracování pro jednorozměrné a dvou-
rozměrné datové soubory. Tyto metody zvolíme podle toho, jak se liší počet variant znaku od rozsahu výběrového souboru.

2.1 Jednorozměrné bodové rozložení četností

Jestliže počet variant znaku X v jednorozměrném datovém souboru není příliš velký ve srovnání s rozsahem výběrového souboru, pak přiřazujeme četnosti jednotlivým variantám a hovoříme o bodovém rozložení četností.

Základní pojmy

Nechť je dán jednorozměrný datový soubor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, v němž znak X nabývá r variant. Pro $j = 1, \dots, r$ definujeme absolutní četnost varianty $x_{[j]}$ ve výběrovém souboru

$$n_j = N(X = x_{[j]}),$$

relativní četnost varianty $x_{[j]}$ ve výběrovém souboru

$$p_j = \frac{n_j}{n},$$

absolutní kumulativní četnost prvních j variant ve výběrovém souboru

$$N_j = N(X \leq x_{[j]}) = n_1 + \dots + n_j$$

a relativní kumulativní četnost prvních j variant ve výběrovém souboru

$$F_j = \frac{N_j}{n} = p_1 + \dots + p_j.$$

Tabulka typu jako na obrázku 2.1 se nazývá variační řada (nebo též tabulka rozložení četností).

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
$x_{[1]}$	n_1	p_1	N_1	F_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$	n_r	p_r	N_r	F_r

Tabulka 2.1: Variační řada.

Pomocí relativních četností zavedeme četnostní funkci

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} p_j & \text{pro } x = x_{[j]}, j = 1, \dots, r; \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a pomocí relativních kumulativních četností zavedeme empirickou distribuční funkci

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_{[1]}; \\ F_j & \text{pro } x_{[j]} \leq x < x_{[j+1]}, j = 1, \dots, r-1; \\ 1 & \text{pro } x \geq x_{[r]}. \end{cases}$$

Četnostní funkce má následující vlastnosti:

- je nezáporná ($\forall x \in \mathbb{R} : \tilde{p}(x) \geq 0$);
- je normovaná, tj. označíme-li M nejvýše spočetnou množinu těch reálných čísel, kde je četnostní funkce kladná, pak ($\sum_{x \in M} \tilde{p}(x) = 1$).

Empirická distribuční funkce má tyto vlastnosti:

- je neklesající ($\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : \tilde{F}(x_1) \leq \tilde{F}(x_2)$);
- je zprava spojitá ($\forall x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, ale pevně dané: $\lim_{x \rightarrow x_0+} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$);
- je normovaná ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{F}(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{F}(x) = 1$).

Příklad 2.1. Pro datový soubor z příkladu 1.3 sestavte variační řadu známek z fyziky (označíme jako znak X). Nakreslete grafy četnostní funkce a empirické distribuční funkce.

Řešení

Cesta k vytvoření tabulky četností v systému STATISTICA: **Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – Proměnné X – Výpočet**. Dostaneme tak tabulku 2.2, kde vidíme, že jedničku z fyziky měli 4 žáci, dvojku 11 žáků, trojku 9 žáků, čtyřku 4 žáci a neprospěli 2 žáci. Na posledním řádku označeném ChD je uveden počet chybějících dat.

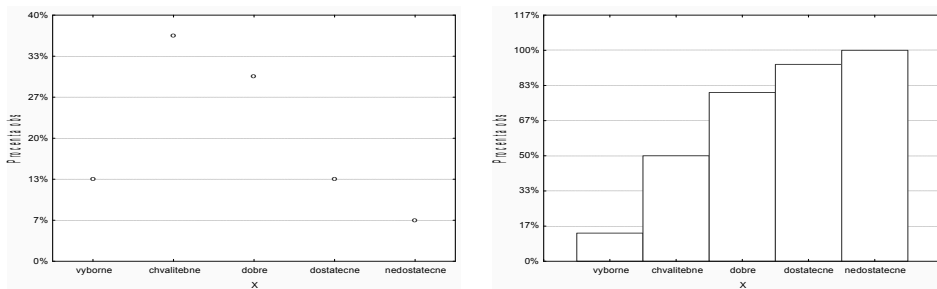
Graf četnostní funkce: **Grafy – Histogramy** – vypneme **Typ proložení Normální** – **Proměnná X – OK** – na záložce **Detaily** vybereme **Osa Y % – OK**. Ve vytvořeném grafu dvakrát

Kategorie	Tabulka četností: X: známka z fyziky (zaci.sta)			
	Četnost	Kumulativní četnost	Rel. četnost	Kumulativní rel. četnost
vyborne	4	4	13,33333	13,33333
chvalitebne	11	15	36,66667	50,00000
dobre	9	24	30,00000	80,00000
dostatecne	4	28	13,33333	93,33333
nedostatecne	2	30	6,66667	100,00000
ChD	0	30	0,00000	100,00000

Tabulka 2.2: Tabulka četností k příkladu 2.1.

klikneme na pozadí grafu – vybereme **Graf: Sloupce** – odškrtneme Zobrazovat sloupce vybereme **Graf: Obecné** – zaškrtneme **Značky – OK**.

Graf empirické distribuční funkce: Při tvorbě histogramu na záložce **Detaily** zvolíme **Zobrazovaný typ Kumulativní, Osa Y %** – dvakrát klikneme na pozadí grafu – vybereme **Graf: Sloupce – Typ: Obdélníky – OK**. Oba grafy vidíme na obrázku 2.1. Z grafu empi-



Obrázek 2.1: Graf četnostní funkce (vlevo) a empirické distribuční funkce (vpravo) pro data z příkladu 2.1.

rické distribuční funkce bohužel nelze jednoduše odstranit svislé čáry. Stojí za povšimnutí, že výška „schodu“ v grafu empirické distribuční funkce ve variantách „výborně“, „chvalitebně“, „dobře“, „dostatečně“ a „nedostatečně“ odpovídá hodnotě četnostní funkce v příslušné variantě. □

Grafické znázornění bodového rozložení četností

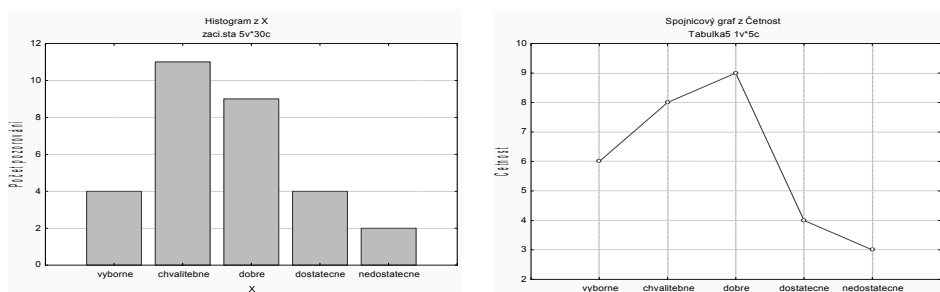
Existuje několik způsobů grafického znázornění četností jednotlivých variant znaku X . Zde uvedeme sloupkový diagram a polygon četností. Sloupkový diagram je soustava na sebe navazujících obdélníků, kde střed základny je varianta znaku X a výška je absolutní či relativní četnost této varianty. Polygon četností je lomená čára spojující body, jejichž x -ová souřadnice je varianta znaku X a y -ová souřadnice je absolutní či relativní četnost této varianty.

Příklad 2.2. Pro datový soubor z příkladu 1.3 vytvořte sloupkový diagram pro známky z fyziky (znak X) a polygon četností pro známky z chemie (znak Y).

Řešení

Vytvoření sloupkového diagramu: **Grafy – Histogramy – Proměnné X – OK** – vypneme **Normální proložení – Details** – zaškrtneme **Mezery mezi sloupci – OK**.

Vytvoření polygonu četností: V pracovním sešitu vstoupíme do tabulky rozložení četností proměnné Y. Nastavíme se na řádek označený ChD. Pomocí **Případy – Odstranit** vymažeme tento řádek. Nastavíme se kurzorem na Četnost – klikneme pravým tlačítkem – **Grafy bloku dat – Spojnicový graf: celé sloupce**. Vykreslí se polygon absolutních četností.



Obrázek 2.2: Sloupkový diagram pro znak X (vlevo) a polygon četností pro znak Y (vpravo) z příkladu 2.2.

Oba grafy jsou znázorněny na obr. 2.2. Vidíme, že rozložení známek je v obou případech velmi nerovnoměrné, převládají hodnocení „chvalitebně“ a „dobře“, varianty „výborně“, „dostatečně“ a „nedostatečně“ se vyskytují méně často. □

2.2 Dvourozměrné bodové rozložení četností

Základní pojmy

Nechť je dán dvourozměrný datový soubor $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$, kde znak X má r variant a znak Y

má s variant. Pak definujeme simultánní absolutní četnost dvojice $(x_{[j]}, y_{[k]})$ ve výběrovém souboru

$$n_{jk} = N(X = x_{[j]} \wedge Y = y_{[k]}),$$

simultánní relativní četnost dvojice $(x_{[j]}, y_{[k]})$ ve výběrovém souboru

$$p_{jk} = \frac{n_{jk}}{n},$$

marginální absolutní četnost varianty $x_{[j]}$

$$n_{j\cdot} = N(X = x_{[j]}) = n_{j1} + \dots + n_{js},$$

marginální relativní četnost varianty $x_{[j]}$

$$p_{j\cdot} = \frac{n_{j\cdot}}{n} = p_{j1} + \dots + p_{js},$$

marginální absolutní četnost varianty $y_{[k]}$

$$n_{.k} = N(Y = y_{[k]}) = n_{1k} + \dots + n_{rk},$$

marginální relativní četnost varianty $y_{[k]}$

$$p_{.k} = \frac{n_{.k}}{n} = p_{1k} + \dots + p_{rk},$$

sloupcově podmíněnou relativní četnost varianty $x_{[j]}$ za předpokladu $y_{[k]}$

$$p_{j(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{.k}},$$

a řádkově podmíněnou relativní četnost varianty $y_{[k]}$ za předpokladu $x_{[j]}$

$$p_{(j)k} = \frac{n_{jk}}{n_{j.}}.$$

Simultánní četnosti či podmíněné relativní četnosti zapisujeme do kontingenční tabulky. Kontingenční tabulka např. simultánních absolutních četností má tvar uvedený v tabulce 2.3.

	y	$y_{[1]}$	$\dots$	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
x	n_{jk}				
$x_{[1]}$		n_{11}	$\dots$	n_{1s}	$n_{1.}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{[r]}$		n_{r1}	$\dots$	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$		$n_{.1}$	$\dots$	$n_{.s}$	n

Tabulka 2.3: Kontingenční tabulka absolutních četností.

Funkce

$$\tilde{p}(x, y) = \begin{cases} p_{jk} & \text{pro } x = x_{[j]}, y = y_{[k]}, j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, s; \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá simultánní četnostní funkce. Četnostní funkce pro znaky X a Y odlišíme indexem:

$$\tilde{p}_1(x) = \begin{cases} p_{j.} & \text{pro } x = x_{[j]}, j = 1, \dots, r; \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$\tilde{p}_2(y) = \begin{cases} p_{.k} & \text{pro } y = y_{[k]}, k = 1, \dots, s; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť M_1 resp. M_2 jsou nejvýše spočetné množiny reálných čísel, kde $\tilde{p}_1(x)$ resp. $\tilde{p}_2(y)$ jsou kladné. Mezi simultánní četnostní funkcí a marginálními četnostními funkcemi platí vztahy

$$\tilde{p}_1(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x, y), \quad \tilde{p}_2(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \tilde{p}(x, y).$$

Funkce $\tilde{p}_{1|2}(x|y)$ zavedená vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R} : \tilde{p}_{1|2}(x|y) = \begin{cases} \frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{p}_2(y)} & \text{pro } \tilde{p}_2(y) > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá sloupcově podmíněná četnostní funkce. Funkce $\tilde{p}_{2|1}(y|x)$ zavedená vztahem

$$\forall y \in \mathbb{R} : \tilde{p}_{2|1}(y|x) = \begin{cases} \frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{p}_1(x)} & \text{pro } \tilde{p}_1(x) > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá řádkově podmíněná četnostní funkce.

Řekneme, že znaky X, Y jsou v daném výběrovém souboru četnostně nezávislé, když pro všechna $j = 1, \dots, r$ a všechna $k = 1, \dots, s$ platí multiplikativní vztah

$$\tilde{p}_{jk} = \tilde{p}_j \cdot \tilde{p}_k$$

neboli

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) = p_1(x) p_2(y).$$

Definici četnostní nezávislosti lze vyslovit i takto: znaky X, Y jsou v daném výběrovém souboru četnostně nezávislé, jestliže platí

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tilde{p}_2(y) > 0 : \tilde{p}_{1|2}(x|y) = \tilde{p}_1(x),$$

resp.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{p}_1(x) > 0 : \tilde{p}_{2|1}(y|x) = \tilde{p}_2(y).$$

Znamená to, že podmíněná četnostní funkce znaku X za podmínky $Y = y$ je rovna marginální četnostní funkci znaku X , resp. podmíněná četnostní funkce znaku Y za podmínky $X = x$ je rovna marginální četnostní funkci znaku Y .

Příklad 2.3. Pro datový soubor z příkladu 1.3:

- sestavte kontingenční tabulky simultánních absolutních a relativních četností;
- nakreslete graf simultánní četnostní funkce $\tilde{p}(x, y)$;
- sestavte kontingenční tabulky sloupcově a řádkově podmíněných relativních četností;
- zjistěte, kolik procent těch žáků, kteří měli jedničku z chemie, mělo dvojku z fyziky;
- zjistěte, kolik procent těch žáků, kteří měli jedničku z fyziky, mělo dvojku z chemie;
- zjistěte, zda znaky X, Y jsou v daném výběrovém souboru četnostně nezávislé.

Řešení

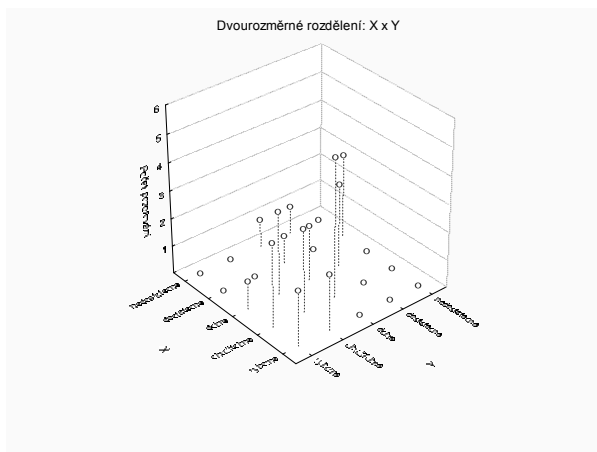
Ad a), cesta k vytvoření kontingenční tabulky v systému STATISTICA: *Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Kontingenční tabulky – OK – Specif. tabulky – List 1 X, List 2 Y – OK – OK* – na záložce *Možnosti* zaškrtneme *Procenta celkového počtu – Výpočet*.

	X	Y vyborne	Y chvalitebne	Y dobre	Y dostatecne	Y nedostatecne	Řádk. součty
Četnost	vyborne	2	2	0	0	0	4
Celková četn.		6,67%	6,67%	0,00%	0,00%	0,00%	13,33%
Četnost	chvalitebne	3	3	5	0	0	11
Celková četn.		10,00%	10,00%	16,67%	0,00%	0,00%	36,67%
Četnost	dobre	1	3	2	3	0	9
Celková četn.		3,33%	10,00%	6,67%	10,00%	0,00%	30,00%
Četnost	dostatecne	0	0	1	0	3	4
Celková četn.		0,00%	0,00%	3,33%	0,00%	10,00%	13,33%
Četnost	nedostatecne	0	0	1	1	0	2
Celková četn.		0,00%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	6,67%
Četnost	Vš.skup.	6	8	9	4	3	30
Celková četn.		20,00%	26,67%	30,00%	13,33%	10,00%	

Obrázek 2.3: Kontingenční tabulka z příkladu 2.3.

V tabulce 2.3 vidíme, že v našem souboru jsou dva žáci (tj. 6,67 %), kteří měli z obou předmětů „výborně“, dva žáci (tj. 6,67 %), kteří měli z fyziky „výborně“ a z chemie „chvalitebně“ atd.

Ad b), nakreslení grafu simultánní četnostní funkce: Na liště aktivujeme **Výsledky: kontingenční tabulky – Detaily – 3D histogramy**. Vzniklý graf je třeba upravit: dvakrát klikneme myší na pozadí grafu – vybereme **Graf – Vzhled – Typ – Špičky – OK**. Výsledný graf je na obrázku 2.4. Pozor, v grafu jsou znázorněny absolutní simultánní četnosti, nikoliv relativní. Graf lze natáčet pomocí **Zorného bodu**.



Obrázek 2.4: Graf simultánní četnostní funkce k příkladu 2.3.

Ad c), vytvoření kontingenčních tabulek sloupcově a řádkově podmíněných relativních četností: Na liště aktivujeme **Výsledky: kontingenční tabulky** – na záložce **Možnosti** zaškrtneme **Procenta z počtu ve sloupci resp. Procenta z počtu v řádku – Výpočet**. Kontingenční tabulku sloupcově podmíněných relativních četností vidíte v tabulce 2.4, kontingenční tabulku řádkově podmíněných relativních četností v tabulce 2.5.