

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

věcné a matematické vysvětlení
základních finančních pojmů

metody pro praktické rozhodování
soukromých osob i podnikatelů

nové finanční produkty

výborná učebnice pro studenty
středních a vysokých škol

řešené praktické příklady

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek



Grada Publishing

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována ani šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

Edice Osobní a rodinné finance

**doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D., doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.,
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.**

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Vydala GRADA Publishing, a.s.
U Průhonu 22, Praha 7,
jako svou 5287. publikaci

Realizace obálky Jan Dvořák
Foto na obálce Allphoto.cz
Sazba Antonín Plicka
Odpovědná redaktorka Ing. Michaela Průšová
Počet stran 304
Osmé vydání, Praha 1993, 1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2013
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

© GRADA Publishing, a.s., 2013

ISBN 978-80-247-4831-3

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8721-3 (ve formátu PDF)

GRADA Publishing: *tel.: 234 264 401, fax: 234 264 400, www.grada.cz*

Obsah

Předmluva	7
1. Základní pojmy	9
1.1 Procentový počet	9
1.2 Funkce	11
1.3 Průměry	18
1.4 Posloupnosti a řady	20
2. Úročení	24
2.1 Základní pojmy	24
2.2 Typy úročení	27
2.3 Jednoduché úročení polhůtní	27
2.4 Základní rovnice pro jednoduché polhůtní úročení	33
2.5 Současná a budoucí hodnota při jednoduchém úročení	36
2.6 Diskont	38
2.7 Vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou	40
3. Složené úročení	47
3.1 Základní rovnice pro složené úročení polhůtní	47
3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení – smíšené úročení	52
3.3 Výpočet doby splatnosti	56
3.4 Současná hodnota při složeném úročení	58
3.5 Výpočet výnosnosti (úrokové sazby)	66
3.6 Výpočet úroku	67
3.7 Srovnání jednoduchého a složeného úročení	68
3.8 Efektivní úroková sazba	69
3.9 Úroková intenzita – spojitě úročení	71
3.10 Nominální a reálná úroková sazba	75
3.11 Hrubý a čistý výnos	77
4. Spoření	82
4.1 Spoření krátkodobé	82
4.2 Dlouhodobé spoření	91
4.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	98
5. Důchody jako pravidelné platby z investice	118
5.1 Důchod bezprostřední	120
5.2 Důchod odložený	127
5.3 Důchod věčný	131
6. Splácení úvěru	138
6.1 Splácení úvěru stejnými splátkami (konstantní annuita)	140
6.2 Určení počtu předem daných konstantních annuit a poslední splátky úvěru	146
6.3 Úmor úvěru nestejnými splátkami	151
7. Směnky a směnečné obchody	164
7.1 Diskont a eskontní úvěr	165
7.2 Eskont směnky na základě střední doby splatnosti	169
7.3 Depozitní směnky	171

8. Skonto	174
8.1 Srovnání absolutní výše skonta a úroku	175
8.2 Srovnání relativní výše skonta a úroku	176
9. Běžné účty	178
9.1 Metody výpočtu úroků na běžných účtech	178
9.2 Zůstatkový způsob	178
9.3 Postupný způsob	180
9.4 Zpětný způsob	180
10. Hypoteční úvěry	182
10.1 Stanovení výše hypotečního úvěru	183
10.2 Splácení hypotečních úvěrů	185
10.3 Státní finanční podpora hypotečního úvěrování	187
11. Spotřebitelské úvěry	193
11.1 Úročení spotřebitelských úvěrů	194
12. Forfaiting, faktoring a leasing	198
12.1 Forfaiting	198
12.2 Faktoring	205
12.3 Leasing	209
13. Dluhopisy	214
13.1 Cena dluhopisu	217
13.2 Výnos z dluhopisů a jeho měření	223
13.3 Výnosové křivky	229
14. Durace, konvexita, imunizace	238
14.1 Durace pevně úročeného dluhopisu	238
14.2 Další typy durace	241
14.3 Konvexita	245
14.4 Imunizace	248
15. Měření výkonnosti portfolia	256
15.1 Časově vážené metody (TWR)	256
15.2 Peněžně vážené metody (MWR)	258
16. Akcie	262
16.1 Cena akcie	262
16.2 Předkupní právo	268
16.3 Výnos z akcií a jeho měření	274
17. Měnový kurz a devizové obchody	280
17.1 Způsob kotace měnových kurzů	280
17.2 Křížové kurzy	282
18. Finanční termínové obchody	286
18.1 Termínová úroková sazba	287
18.2 Termínová cena cenného papíru	290
18.3 Termínový měnový kurz	291
18.4 Termínové obchody v praxi	298
Literatura	300
Rejstřík	302

Předmluva

I osmé, rozšířené vydání *Finanční matematiky pro každého* se drží osvědčených principů, na kterých byla založena vydání předchozí. To znamená, že srozumitelným způsobem vysvětluje základní matematické postupy využívané v bankovní a finanční praxi širokému okruhu čtenářů.

Knížka se snaží důsledně naplnit to, že by měla být určena skutečně *pro každého*, kdo se z jakéhokoliv důvodu zajímá o finanční matematiku. Nabízí proto jak spolehlivého průvodce při prvních krocích do tajů finančních výpočtů, aniž musí čtenář mít rozsáhlé matematické či ekonomické znalosti, tak může být i cenným rádčem profesionálovi při objasnění matematického zákulisí finančních produktů a investování.

Je koncipována jako učebnice a vychází ze zkušeností autorů při výuce na Vysoké škole ekonomické v Praze. Je proto vhodná pro studenty vysokých, vyšších odborných či středních škol s ekonomickým zaměřením. Snadno se v ní však budou orientovat i ti, kteří si budou chtít doplnit v dnešní době nezbytné znalosti samostudiem.

Obsah knížky je možné rozdělit do dvou celků. První, kapitoly 1 až 6, vysvětluje matematické metody a postupy, které jsou využívány v oblasti financí. Druhý celek, kapitoly 7 až 18, je potom zaměřen na konkrétní aplikace těchto postupů u všech důležitých bankovních a finančních produktů.

Výklad v jednotlivých kapitolách je nejdříve veden v obecné rovině, následně je demonstrován na praktickém příkladě, který je doprovázen i vzorovým řešením.

Pro rychlou orientaci a snadné hledání odpovědi na určitou otázku obsahuje knížka podrobný věcný rejstřík.

Věříme, že Finanční matematika pro každého poskytne každému, kdo ji otevře, zajímavé informace, které využije při finančním rozhodování v podnikání či správě svých soukromých financí.

1. Základní pojmy

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. V textu se proto budeme setkávat s některými matematickými pojmy a postupy. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola.

1.1 Procentový počet

Slovo **procento** je latinského původu a znamená setinu celku nebo základu.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). To znamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí:

$$1\% = \frac{1}{100},$$

tzn. jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu; potom:

100 % = 1 celek = celý základ.

V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny:

- základ (budeme označovat z);
- počet procent (budeme označovat p);
- procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách (budeme označovat x).

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

1. výpočet procentové části x ;
2. výpočet základu z ;
3. výpočet počtu procent p .

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců:

$$x = z \cdot \frac{p}{100}, \quad (1-1)$$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}, \quad (1-2)$$

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}, \quad (1-3)$$

kde x je procentová část;
 z je základ;
 p je počet procent.

Jednou z možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je i použití úměry neboli trojčlenky.

Příklad 1-1 Výpočet procentové části

Kolik činí sjednaný podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny, má-li výrobní cena výši 2 000 Kč a prodejní cena činí 115 % výrobní ceny?

Řešení

Nejprve vypočítáme, jak vysoká byla prodejní cena. To je problém výpočtu procentové části podle vztahu (1-1). Dosadíme $z = 2\,000$, $p = 115\%$. Potom:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,000 \cdot \frac{115}{100} = 2\,300.$$

Prodejní cena činila 2 300 Kč.

Nyní potřebujeme zjistit, kolik činí podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny. Opět počítáme procentovou část. Nyní dosadíme $p = 15\%$, $z = 2\,300$:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,300 \cdot \frac{15}{100} = 345.$$

Zisk činí 345 Kč.

Příklad 1-2 Výpočet základu v procentovém počtu

Daň z příjmu činila při sazbě daně 27,5 % částku 1 170 Kč. Jak vysoký byl příjem (od odpočitatelných položek abstrahujeme)?

Řešení

Kromě výše uvedených vzorců je možno použít trojčlenku:

27,5 % odpovídá 1 170 Kč;

100 % odpovídá z Kč.

Sestavíme rovnost:

$$\frac{z}{1\,170} = \frac{100}{27,5};$$

$$z = \frac{100}{27,5} \cdot 1\,170 = 4\,254,54.$$

Hrubý příjem činil 4 255 Kč.

1.2 Funkce

Dříve, než budeme zjednodušeně definovat pojem funkce, seznámíme se s pojmem **proměnná**. Jestliže říkáme, že celková cena zboží závisí na jeho množství, pak proměnné jsou množství a celková cena, konstanta (konstantní veličina) je cena za jednotkové množství. Označíme-li celkovou cenu y , množství zboží x a cenu za jednotkové množství c , pak x , y jsou v tomto případě proměnné a c je konstanta.

Funkcí budeme rozumět předpis, kterým jednoznačně přiřadíme určité hodnotě proměnné x určitou hodnotu proměnné y . Píšeme potom:

$$y = f(x).$$

Proměnnou x nazýváme **nezávisle proměnná** a proměnnou y nazýváme **závisle proměnná**. Hodnota proměnné y závisí na hodnotě proměnné x .

Máme-li např. cenu za 1 kg banánů 28 Kč, pak celková cena nakoupeného množství banánů bude záviset právě na hmotnosti banánů, které nakoupíme.

Podle výše uvedeného příkladu bude tedy hmotnost zboží x nezávisle proměnná a celková cena y závisle proměnná.

Funkce bude mít v tomto jednoduchém případě tvar:

$$y = 28 \cdot x.$$

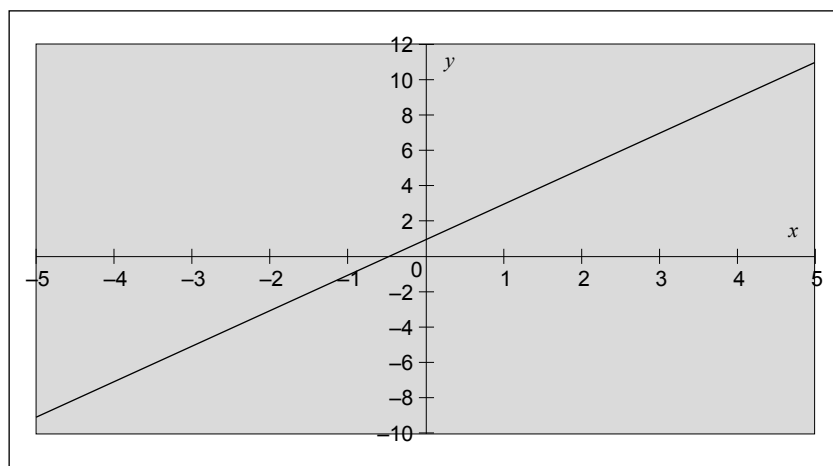
V našem textu se setkáme s několika funkcemi, které si nyní dále popíšeme, neboť nám budou později užitečné.

1.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis pro lineární funkci bude mít tvar:

$$y = k \cdot x + q, \quad (1-4)$$

kde k, q jsou konstanty;
 x je nezávisle proměnná;
 y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1 Graf lineární funkce $y = 2 \cdot x + 1$

Graficky je možno tuto funkci znázornit přímkou. Konstanta k určuje směr přímky a konstanta q určuje průsečík s osou y .

Lineární funkci můžeme ukázat třeba na příkladu poplatků za telefon. Paušální platba, nezávislá na počtu uskutečněných hovorů, je konstanta q , konstanta k je cenou za jeden impuls a nezávisle proměnnou x je počet uskutečněných impulsů. Závisle proměnná y je potom výše celkového poplatku za telefon.

V ekonomických úvahách se často užívá závislosti zvané **přímá úměrnost**, která je znázorněna právě lineární funkcí.

Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot y_i / x_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Funkční předpis je tedy dán vzorcem:

$$y = k \cdot x. \quad (1-5)$$

Grafem je přímka, procházející počátkem (průsečíkem os x a y). Známe-li konstantu k , můžeme ke kterékoli hodnotě x_i vypočítat hodnotu y_i .

Předchozí příklad by byl přímou úměrností, jestliže by telefonní poplatky neobsahovaly paušální platbu.

1.2.2 Rovnoosá hyperbola

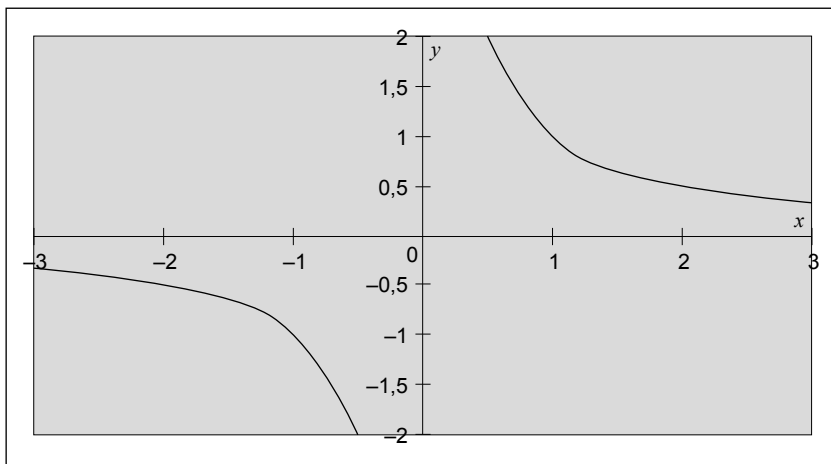
Dále se v ekonomických úvahách setkáváme se závislostí zvanou **nepřímá úměrnost**. Říkáme, že dvě veličiny jsou nepřímo úměrné, jestliže součin každých dvou odpovídajících si hodnot x_i, y_i je roven konstantě. Tedy:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

Funkční předpis je v tomto případě dán vzorcem:

$$y = \frac{k}{x}. \quad (1-6)$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola. V případě, že $k = 1$, se nazývá rovnoosá.



Obrázek 1.2 Graf rovnoosé hyperboly

V našem příkladu s telefony (bez paušální platby, tj. $q = 0$) jsme řekli, že celkový poplatek za telefon (y) je dán součinem ceny za jeden impuls (k) a počtu uskutečněných impulsů (x), to je:

celkový poplatek $y = \text{cena impulsu } k \cdot \text{počet impulsů } x$.

Celkový poplatek y je přímo úměrný ceně za jeden impuls k .

Pokud budeme však naopak znát celkový poplatek a cenu jednoho impulsu a budeme chtít zjistit počet uskutečněných impulsů, můžeme tak učinit dosazením do vzorce:

$$\text{počet impulsů} = \frac{\text{celkový poplatek}}{\text{cena za jeden impuls}}.$$

Vidíme, že počet impulsů je (při daném celkovém poplatku) nepřímo úměrný ceně za jeden impuls.

1.2.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, kde nezávisle proměnná se vyskytuje jako exponent. To znamená, že ji můžeme psát ve tvaru:

$$y = a^x, \quad (1-7)$$

kde $a > 0$, x je racionální číslo¹.

Z matematiky víme, že každé reálné číslo² umocněné na nultou se rovná jedné. Z toho můžeme pro exponenciální křivky odvodit zajímavou vlastnost. Pro všechna a platí, že pro $x = 0$ se rovná $a^x = 1$. Z toho vyplývá, že všechny exponenciální křivky procházejí bodem $(0, 1)$, který leží na ose y .

Speciální průběh má exponenciální funkce, je-li a rovno jedné ($a = 1$). Pak pro všechna x platí, že y se rovná také jedné ($y = 1$), neboť číslo jedna umocněné na libovolné číslo je opět číslo jedna. Grafem je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x .

Funkční hodnoty exponenciální funkce y budou pro libovolné hodnoty proměnné x kladné.

Speciálním případem je funkce:

$$y = e^x,$$

kde e představuje tzv. **Eulerovo číslo**, definované pomocí limity³ jako:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (1-8)$$

což budeme potřebovat v oddílu 3.9 při definici úrokové intenzity.

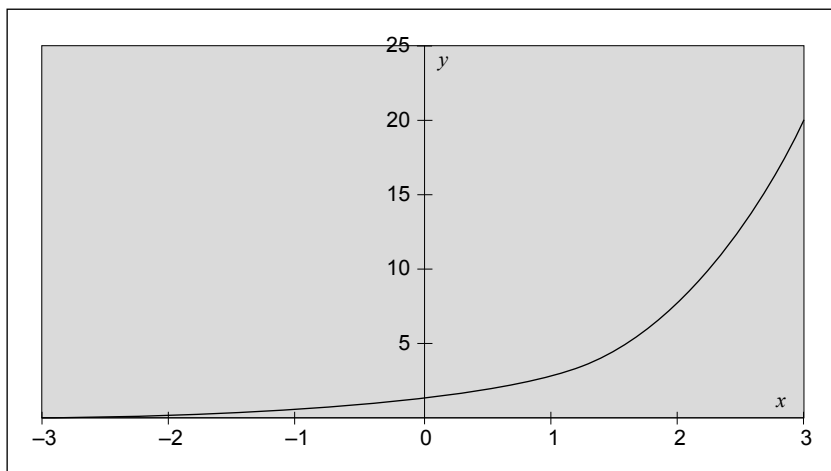
Exponenciální funkci použijeme v oddílu 3.1 při odvozování problematiky složeného úročení.

¹ **Racionální číslo** je číslo, které je možno vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. **Celá čísla** jsou čísla: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Celá kladná čísla nazýváme **přirozená čísla**.

² **Reálné číslo** je jak číslo racionální, tak číslo, které není možno napsat ve tvaru podílu dvou celých čísel (**číslo iracionální**), např. $\sqrt{2}$.

³ Zde se jedná o limitu posloupnosti (viz oddíl 1.4).

Příklad exponenciální funkce je znázorněn grafem na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Graf exponenciální funkce $y = e^x$

1.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkcí inverzní k funkci exponenciální. Inverzní funkcí rozumíme funkci, kde původní závisle proměnná se stala nezávisle proměnnou a naopak. Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$y = \log_a x, \quad (1-9)$$

kde nazýváme:

$x \in (0, \infty)$ číslo logaritmované;
 $a \neq 1$ základ logaritmu;
 y logaritmus.

Logaritmus y je číslo, kterým když umocníme základ a , dostaneme logaritmované číslo x . To znamená, že platí:

$$a^y = x.$$

Hodnoty nezávisle proměnné x logaritmické funkce musejí být vždy kladné, neboť odpovídají hodnotám závisle proměnné exponenciální funkce,

kteřá je inverzní funkcí k funkci logaritmické. Jak jsme viděli, byly funkční hodnoty závisle proměnné exponenciální funkce vždy kladné.

Všechny logaritmické křivky analogicky jako křivky exponenciální procházejí pro všechny hodnoty a stejným bodem, který v případě logaritmických křivek leží na ose x , bodem $(1,0)$.

Pro naše účely budeme užívat **přirozený logaritmus**, kde $a = e$ a e je již zmíněné Eulerovo číslo.

Zapisujeme:

$$y = \log_e x = \ln x.$$

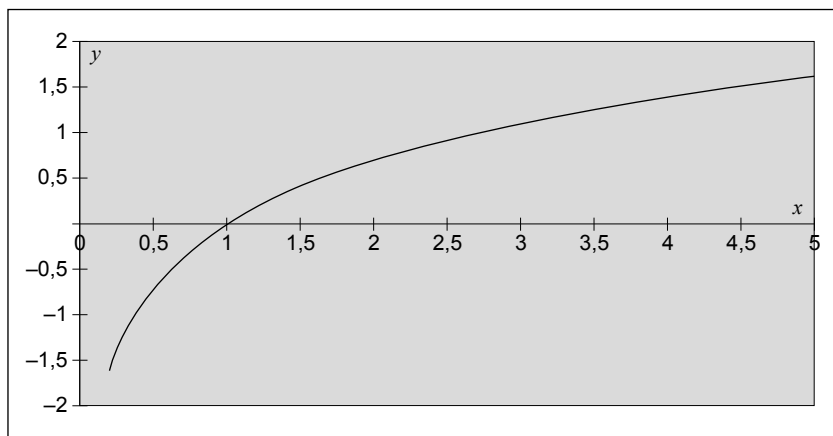
Je-li základ logaritmu a roven deseti ($a = 10$), hovoříme o **dekadickém logaritmu**. Pak píšeme:

$$y = \log_{10} x.$$

Tedy:

$$y = 10^y.$$

Průběh logaritmické funkce pro $a = e$ je znázorněn grafem na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4 Graf logaritmické funkce $y = \ln x$

Pro logaritmy platí pro libovolná čísla $u, v \in (0, \infty)$ a reálná čísla w následující základní vztahy:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v; \quad (1-10)$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \quad (1-11)$$

$$\ln u^w = w \cdot \ln u. \quad (1-12)$$

S logaritmickou funkcí se setkáme např. u již zmíněného složeného úročení, kdy známe konečnou (zúročenou) výši kapitálu, jeho výši počáteční a máme určit (při dané úrokové sazbě) dobu uložení.

1.3 Průměry

1.3.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr m_a je pro n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ definován jako:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \quad (1-13)$$

Zjednodušeně řečeno, aritmetický průměr získáme, když součet daných čísel vydělíme jejich počtem.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1 ,

n_2 čísel a_2 ,

:

n_r čísel a_r ,

pak můžeme výpočet zjednodušit a jejich aritmetický průměr bude roven:

$$m_a = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \dots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}, \quad (1-14)$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

V tomto případě hovoříme o **váženém aritmetickém průměru**. Čísla $n_1, n_2, \dots, n_r$ se označují jako váhy čísel $a_1, a_2, \dots, a_r$.

S aritmetickým průměrem se setkáme při výpočtu střední doby splatnosti více pohledávek.

1.3.2 Geometrický průměr

Vedle obecně známého aritmetického průměru existuje i průměr geometrický.

Pro n kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je geometrický průměr m_g definován jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

neboli jednoduše řečeno jako n -tá odmocnina součinu n čísel.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1 ,

n_2 čísel a_2 ,

:

n_r čísel a_r ,

pak vzorec pro jejich geometrický průměr můžeme opět zapsat jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \dots \cdot a_r^{n_r}},$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

Číslo m_g se nazývá **vážený geometrický průměr**.

1.3.3 Vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

Lze dokázat, že pro sobě odpovídající průměry platí, že aritmetický průměr je větší než geometrický průměr.

Symbolicky můžeme tento vztah zapsat:

$$m_a > m_g.$$

Dokažme nyní, že aritmetický průměr je větší než geometrický, a to pro dvě kladná čísla a_1 a a_2 . Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že platí opak, tedy že aritmetický průměr je menší než geometrický:

$$m_a < m_g.$$

To tedy znamená, že má platit vztah:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} < \sqrt{a_1 \cdot a_2},$$

který dále budeme upravovat:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$a_1 + a_2 - 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 < 0$$

a to není možné, neboť druhá mocnina každého nenulového čísla je větší než nula. Předpoklad, že aritmetický průměr je menší než geometrický, je tedy chybný a sporem jsme dokázali, že platí opak.

1.4 Posloupnosti a řady

Přiřadíme-li každému přirozenému (tj. celému kladnému) číslu n určité reálné číslo a_n , pak souhrn čísel $a_1, a_2, \dots$ nazýváme **posloupnost**⁴.

⁴ Posloupnost může mít limitu (viz oddíl 1.2.3). Říkáme, že posloupnost má **limitu** rovnou číslu a , jestliže pro skoro všechna n bude absolutní hodnota rozdílu $a_n - a$ menší než jakkoli zvolené malé kladné číslo.

Výraz (součet všech členů posloupnosti):

$$a_1 + a_2 + \dots$$

nazýváme **řadou** a čísla $a_1, a_2, \dots$ **členy řady**.

Má-li řada konečný počet členů, nazývá se **konečná**, má-li nekonečný počet členů, nazývá se **nekonečná**.

1.4.1 Aritmetické posloupnosti a řady

Posloupnost, u níž rozdíl (diference) kterýchkoli dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, se nazývá **aritmetická**.

Tedy výraz:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \dots + [a_1 + (n-1)d]$$

se nazývá **konečná aritmetická řada**,

kde a_1 je první člen řady;
 a_n je poslední n -tý člen řady;
 n je počet členů;
 d je difference.

Pro libovolný k -tý člen konečné aritmetické řady, kde k je 1, 2, ..., n , platí:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d. \quad (1-15)$$

Pro uvedenou aritmetickou řadu platí, že každý člen je aritmetickým průměrem ze sousedních členů, tedy:

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot (a_{k-1} + a_{k+1}).$$

Pro součet prvních n členů aritmetické řady platí:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \quad (1-16)$$

Logika vzorce vyplývá z toho, že můžeme spárovat (sečíst) vždy dva členy řady – první a poslední, druhý a předposlední atd., přičemž tyto

součty jsou konstantní (stále stejné). Takových dvojic můžeme logicky sestavit polovinu z celkového počtu členů řady ($n / 2$).

Dosadíme-li za a_n ze vzorce (1-15), podle nějž platí:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d,$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

do vzorce (1-16), můžeme součet n členů řady vyjádřit:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d).$$

Tyto poznatky budeme potřebovat v kapitole 4 o spoření.

1.4.2 Geometrické řady

Posloupnost, u níž podíl kterýchkoli dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, se nazývá **geometrická**.

Tedy výraz:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1},$$

kde a_1 je první člen;
 a_n je poslední, n -tý člen;
 n je počet členů;
 q je kvocient, který se rovná podílu dvou po sobě jdoucích členů,

nazveme **konečná geometrická řada**.

Je-li $q = 1$, obsahuje řada stejné členy a .

Je-li $q > 1$, je řada **rostoucí**.

Je-li $q \in (0, 1)$, je řada **klesající**.

Je-li $q < 0$, je řada **střídavá** (se střídavými znaménky).

N -tý člen a_n potom vypočteme podle vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \quad (1-17)$$

Součet geometrické řady s n členy je pro $q \neq 1$ dán vzorcem:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (1-18)$$

Každý člen geometrické řady je geometrickým průměrem z jeho dvou sousedních členů, což můžeme napsat jako:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}.$$

Tyto poznatky budeme potřebovat v kapitolách 4 a 5, které jsou věnovány spoření a důchodům.

2. Úročení

Finanční rozhodování patří k velmi důležitým procesům, jejichž podstatu je možno charakterizovat pomocí následujících tří investičních preferencí:

1. Každý investor preferuje více peněz než méně.
2. Každý investor preferuje méně rizika než více.
3. Každý investor preferuje stejné množství peněz dnes spíše než zítra.

Třetí z uvedených možností je spojena s problematikou **časové hodnoty peněz**. To je finanční metoda, která slouží k porovnání dvou či více peněžních částek z různých časových období. Důležitými finančními pojmy, se kterými se při práci s touto metodou setkáváme, jsou **úroková míra a úrok**.

Úrok je veličina, která hraje důležitou úlohu při uzavírání obchodů bank a je významným faktorem, který ovlivní jejich výhodnost jak z hlediska věřitele, tak i dlužníka. Na bázi úrokového počtu je založena celá řada ekonomických úvah a propočtů. Proto se budeme úroku a úrokovým propočtům podrobně věnovat.

2.1 Základní pojmy

Zapůjčí-li jeden subjekt druhému peněžní prostředky, bude požadovat odměnu jako náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, za riziko spojené se změnami tohoto kapitálu (s inflací) a za nejistotu, že kapitál nebude splacen v dané lhůtě a výši. Tato odměna se nazývá **úrok**.

Věřitel tedy získává úrok za to, že poskytl své peníze dočasně (někomu) jinému.

Naopak z pohledu dlužníka je úrok cena, kterou platí za získání úvěru.

Dobu, po kterou je peněžní částka (kapitál) uložena nebo zapůjčena, tedy za kterou počítáme úrok, nazýváme **doba splatnosti (úroková doba, doba existence smluvního vztahu)**.

Vyjádříme-li úrok v procentech z hodnoty kapitálu za časové období, dostaneme **úrokovou sazbu (úrokovou míru)**⁵. Ve finanční teorii a praxi existuje několik druhů úrokových měr. V našem výkladu budeme pracovat celkem se čtyřmi základními druhy:

- nominální úrokovou mírou;
- efektivní úrokovou mírou;
- zvažovanou úrokovou mírou, požadovanou výnosností;
- vnitřním výnosovým procentem.

Nominální úroková míra představuje sjednanou úrokovou míru mezi vypůjčovatelem a poskytovatelem kapitálu a jako taková je uvedena v úvěrové smlouvě, vytištěna na plášti dluhopisu či jiným způsobem zobrazena v platném dokumentu, nebo je přinejmenším mlčky respektována účastníky dohody. Nejdůležitějšími jejími dvěma znaky jsou délka časového období, za které je poměřována, a četnost skládání úroků.

Podle prvního uvedeného znaku rozeznáváme roční nominální úrokovou míru, která se značí p.a. (z latinského *per annum*). Označení, že úroková sazba peněžního ústavu činí 3 % p.a., znamená, že z každé stokoruny dostaneme na konci roku úrok 3 Kč. Můžeme se dále setkat s úrokovou sazbou pololetní, která se označuje p.s. (*per semestre*), čtvrtletní – p.q. (*per quartale*), měsíční – p.m. (*per mensem*) a denní – p.d. (*per diem*).

Přitom platí, že roční nominální úroková míra:

- = 2× pololetní nominální úroková míra;
- = 4× čtvrtletní nominální úroková míra;
- = 12× měsíční nominální úroková míra;
- = 365 (366)× denní nominální úroková míra.

Druhým důležitým znakem je četnost připsování úroků neboli frekvence úročení. Nejčastějším způsobem je roční připsování úroků. Podle tohoto způsobu se úroky k zůstatku bankovního účtu připočítávají tak, že se na konci roku provede výpočet úroků ze zůstatku na účtu a ty se

⁵ Terminologie v této otázce není jednoznačná. Většinou však se pojem úroková sazba používá v případě, jedná-li se o veličinu určenou nějakým subjektem (např. diskontní sazba centrální banky, úroková sazba z termínového vkladu). Pojem úroková míra či míra výnosu, míra zisku se používá, jedná-li se o veličinu vypočítanou z jiných veličin (míra inflace).

potom k němu přičtou. Jestliže bychom tímto způsobem připočítávali úroky nikoli na konci roku, ale na konci každého měsíce, jednalo by se o měsíční připisování úroků. Obdobně mohou být úroky připisovány i pololetně, čtvrtletně, denně atd. V této souvislosti se setkáváme s pojmem **úrokové období**, což je doba, za kterou se úroky pravidelně připisují.

Efektivní úroková míra představuje uměle vypočtenou úrokovou míru, která umožňuje porovnat různé nominální úrokové míry, poměřované sice za stejné období, avšak s různou četností připisování úroků. Tak např. roční efektivní úroková míra nám říká, jak velká roční nominální úroková míra při ročním připisování úroků odpovídá roční nominální úrokové míře při měsíčním, denním či jiném připisování.

Úrokovou míru, kterou budeme používat pro diskontování, resp. akumulování peněžních toků, nazýváme **požadovaná úroková míra** nebo **požadovaná výnosová míra, požadovaná výnosnost**. Poslední dva výrazy se používají zejména v souvislosti s cennými papíry. V podstatě jsou dvě možnosti, jakým způsobem ji můžeme stanovit. Buď nějaké peníze máme, a potom jestliže budeme určitou investici realizovat, budeme něco ztrácet, a to možnost investovat tyto peníze někde jinde, např. je uložit v bance na termínový účet. V tomto případě za požadovanou úrokovou míru dosadíme úrokovou míru z tohoto účtu. Nemusí se však jednat pouze o ztrátu úroků z bankovního vkladu, ale i o ztrátu úroků z dluhopisů nebo ztrátu výnosů z nějaké jiné investice. Takovouto úrokovou míru, která v podstatě představuje ztrátu našich potenciálních výnosů, nazýváme **náklady obětované příležitosti**. Druhá možnost je, že žádné peníze nemáme, a abychom mohli námi plánovanou investici realizovat, musíme si vypůjčit. Za požadovanou úrokovou míru budeme potom dosazovat úrokovou míru z naší půjčky.

Zvláštním druhem úrokové míry je **vnitřní výnosové procento, vnitřní míra výnosu**⁶. V podstatě se jedná o takovou uvažovanou úrokovou míru, při níž se cena investice rovná současně (diskontované) hodnotě budoucích výnosů. V případě dlouhodobých cenných papírů ji označujeme jako **výnosnost do doby splatnosti**⁷.

⁶ Z anglického Internal Rate of Return (IRR).

⁷ z anglického Yield to Maturity (YTM).

Finanční rozhodování se z hlediska délky časového úseku, na který je přijímáno, dělí na krátkodobé a dlouhodobé a v souvislosti s tím je možno též hovořit o možnostech aplikace metody časové hodnoty peněz pomocí dvou typů úročení.

2.2 Typy úročení

Existují dva základní způsoby úročení:

- o **jednoduchém úročení** hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí – jinými slovy, úroky se počítají stále z původního kapitálu;
- o **složeném úročení** se jedná tehdy, jestliže se úroky připsují k peněžní částce a spolu s ní se dále úročí.

Úročení dělíme též podle toho, kdy dochází k placení úroku. Z tohoto hlediska hovoříme o:

- úročení **polhůtním** neboli **dekurzivním** v případě, že se úroky platí na konci úrokového období;
- úročení **předlhůtním** neboli **anticipativním**, dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období.

2.3 Jednoduché úročení polhůtní

U tohoto typu úročení se úročí stále pouze základní částka, vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevznikají tedy úroky z úroků. Úroky jsou vypláceny po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují. Úrok pak nejčastěji vypočítáme podle vzorce:

$$u = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}, \quad (2-1)$$

kde	K	je peněžní částka (kapitál);
	p	je roční úroková sazba v procentech;
	t	je doba splatnosti kapitálu ve dnech (obvykle $0 < t < 360$);
	u	úrok.

Jestliže vyjádříme ve vzorci (2-1) úrokovou sazbu jako desetinné číslo a splatnost v letech, dostaneme vzorec pro výpočet úroku ve tvaru:

$$u = K \cdot i \cdot n, \quad (2-2)$$

kde $i = p / 100$ je úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo (značí úrok z 1 Kč za jeden rok);
 $n = t / 360$ je doba splatnosti vyjádřená v letech (obvykle $0 < n < 1$).

Délku roku jsme ve vzorci (2-1) uvedli jako 360 dní. Zastavme se u problému vyjádření doby splatnosti n , což není v zásadě obtížné. Dělíme počet dní existence smluvního vztahu t (dobu splatnosti ve dnech) délkou roku ve dnech. Pro určení tohoto podílu se vyvinulo několik standardů.

Počet dní v čitateli může být uveden podle následujících kódů:

- **ACT** – započítává se skutečný počet dní smluvního vztahu a obvykle se neuvažuje první den;
- **30E** – celé měsíce se započítávají bez ohledu na skutečný počet dní jako 30 dní;
- **30A** – liší se od 30E maximálně o jeden den, který je započten pouze v případě, že konec smluvního vztahu připadne na 31. den v měsíci a současně začátek smluvního vztahu není 30. nebo 31. den v měsíci.

Délka roku ve jmenovateli je uvedena:

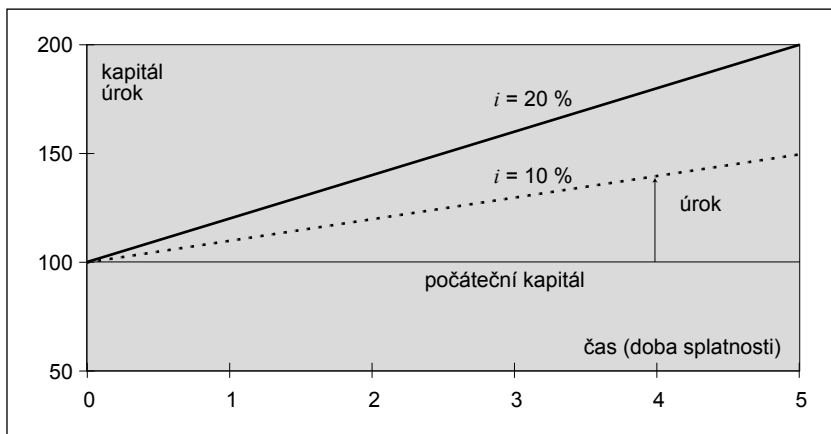
- rok jako 365 dní (resp. 366 v přestupném roce);
- rok jako 360 dní.

Kombinací uvedených možností dostáváme různé standardy pro stanovení doby splatnosti. V praxi nejčastěji kombinace jsou:

- standard **ACT/365 (anglická metoda)** je založen na skutečném počtu dní úrokového období (čitatel) a délce roku 365 (resp. 366) dní;
- standard **ACT/360 (francouzská či mezinárodní metoda)** je založen opět na skutečném počtu dní v čitateli zlomku, ale délka roku (ve jmenovateli) se započítává jako 360 dní;
- standard **30E/360 (německá či obchodní metoda)** je založen na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dní (v čitateli) a délky roku (ve jmenovateli) jako 360 dní.

V uváděných příkladech budeme nejčastěji využívat standard 30E/360 (zejména pro jednoduchost).

Schematicky je výše úroku v závislosti na době splatnosti vyjádřena na obr. 2.1.



Obrázek 2.1 Závislost úroku na době splatnosti kapitálu

Z obrázku i z uvedených vzorců je zřejmé, že velikost úroku závisí nejen na úrokové sazbě a na výši kapitálu, ale též na době splatnosti. Úrok (resp. konečný, zúročený kapitál) je při dané úrokové sazbě lineární funkcí času.

Někdy se setkáme i s výpočtem úroků pomocí tzv. **úrokových čísel** a **úrokových dělitelů**.

Úrokové číslo (*UC*) je definováno jako:

$$UC = \frac{K \cdot t}{100}. \quad (2-3)$$

Úrokový dělitel (*UD*) je definován jako:

$$UD = \frac{360}{p}. \quad (2-4)$$

Úrokový dělitel značí, za kolik dní činí úrok ze 100 Kč 1 Kč.

Setkat se můžeme i s obráceným číslem ($p / 360$), a potom hovoříme o úrokovém násobiteli.

Pomocí výše uvedených vztahů je možno vzorec pro výpočet úroku zapsat ve tvaru:

$$u = \frac{UC}{UD}. \quad (2-5)$$

Tento vzorec se hodí pro výpočet úroků z měnící se výše kapitálu během úrokového období při neměnné výši úrokové sazby.

Jestliže částka K_1 je uložena, a tedy úročena t_1 dní, částka K_2 je uložena a úročena t_2 dní, ..., částka K_r t_r dní, a přitom všechny při stejné úrokové sazbě p , pak úroková čísla jsou podle vztahu (2-3):

$$UC_1 = \frac{K_1 \cdot t_1}{100}, UC_2 = \frac{K_2 \cdot t_2}{100}, \dots, UC_r = \frac{K_r \cdot t_r}{100}.$$

Úrokový dělitel se nemění a je roven $UD = 360 / p$. Úrok pak vypočítáme jako součet úroků za jednotlivá období, které vypočteme podle vzorce (2-5). Vzhledem k tomu, že úrokový dělitel se nemění, můžeme jej vytknout a vzorec pro výpočet celkového úroku můžeme vyjádřit jako:

$$u = \frac{\sum_{j=1}^r UC_j}{UD}. \quad (2-6)$$

Tohoto způsobu se využívá například při výpočtu úroků na běžných účtech.

Příklad 2-1 Výpočet úroku při jednoduchém úročení

Jaké jsou úrokové náklady úvěru ve výši 200 000 Kč, jednorázově splatného za osm měsíců (240 dní) včetně úroku, je-li úroková sazba 9 % p.a.?

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme následující hodnoty:

$$K = 200\,000;$$

$$p = 9;$$