

Matematika v ekonomii a ekonomice



- Moderní učebnice podle anglosaských univerzit
- Aplikace matematiky na ekonomické disciplíny
- Řešené příklady i samostatná cvičení s výsledky
- Případové studie z ekonomické praxe



Matematika v ekonomii a ekonomice



Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

*Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **restně stíháno**.*

RNDr. Luboš Bauer, CSc.

Hana Lipovská

doc. RNDr. Miloslav Mikulík, CSc.

Ing. Vít Mikulík

Matematika v ekonomii a ekonomice

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.

U Průhonu 22, 170 00 Praha 7

tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400

www.grada.cz

jako svou 5755. publikaci

Odborná recenze:

prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi

Grafická úprava a sazba Mgr. David Hampel, Ph.D.

Počet stran 352

První vydání, Praha 2015

Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

© Grada Publishing, a.s., 2015

Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-4419-3

ELEKTRONICKÁ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-9651-2 (ve formátu PDF)

Obsah

Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	13
O autorech	15
Úvodní slovo recenzenta	17
Předmluva	19
1 Připomenutí základních znalostí z matematiky	21
1.1 Množina	21
1.1.1 Množinové operace	23
1.1.2 Řešené příklady a aplikace	26
1.2 Výrokový počet	28
1.2.1 Kvantifikátory	30
1.2.2 Řešené příklady a aplikace	31
1.3 Poznámky k výstavbě matematiky	32
1.4 Úlohy k procvičení	34
2 Čísla	35
2.1 Zavedení reálných čísel	35
2.2 Množiny reálných čísel	39
2.2.1 Další vlastnosti reálných čísel	40
2.2.2 Zavedení racionálních operací s nevlastními čísly	41
2.2.3 Zavedení pojmu interval	41
2.2.4 Nerovnice v oboru reálných čísel	43
2.2.5 Zavedení absolutní hodnoty reálného čísla	43
2.2.6 Mocniny a odmocniny reálných čísel	45
2.3 Komplexní čísla	49
2.4 Připomenutí důležitých vzorců pro počítání s čísly	51
2.5 Řešené příklady a aplikace	53

3	Maticová algebra	63
3.1	Matice	63
3.2	Zvláštní typy matic	66
3.3	Základní operace s maticemi	68
3.4	Úlohy k procvičení	75
3.5	Soustavy lineárních rovnic	75
3.5.1	Soustava m lineárních rovnic o n neznámých	76
3.6	Eliminační metody řešení systému lineárních rovnic	81
3.7	Elementární úpravy matic	82
3.8	Ekvivalentní matice	83
3.9	Gaussova eliminační metoda	83
3.10	Jordanův algoritmus	84
3.11	Matice inverzní ke čtvercové matici	86
3.12	Determinanty	88
3.13	Výpočet determinantu rozvojem podle libovolného řádku nebo sloupce	92
3.13.1	Vztah mezi $ \mathbf{A} $ a $ \mathbf{A}^T $	93
3.14	Výpočet hodnoty determinantu z horní trojúhelníkové matice	95
3.15	Použití determinantů	95
3.16	Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů	97
3.17	Řešené příklady a aplikace	98
3.18	Úlohy k procvičení	105
4	Číselné posloupnosti a číselné řady	107
4.1	Co je to posloupnost	107
4.2	Aritmetická a geometrická posloupnost	109
4.3	Limita posloupnosti	115
4.4	Vlastnosti posloupností reálných čísel	118
4.5	Nekonečné číselné řady	123
4.6	Aplikace posloupností	127
4.7	Řešené příklady a aplikace	136
4.8	Úlohy k procvičení	139
5	Zobrazení a funkce	141
5.1	Základní pojmy	141
5.2	Vlastnosti funkcí	145
5.3	Limita a spojitost funkce jedné proměnné	149
5.3.1	Úvodní poznámky k zavedení limity reálné funkce jedné proměnné	149
5.3.2	Definice limity funkce v daném bodě	150
5.3.3	Spojitost funkce v bodě	154
5.3.4	Inverzní zobrazení	156
5.4	Elementární funkce	157
5.4.1	Polynom	157
5.4.2	Racionální lomená funkce	163
5.4.3	Funkce $\sqrt[n]{x}$	165

5.4.4	Exponenciální funkce a logaritmus	165
5.4.5	Trigonometrické a cyklometrické funkce	167
5.4.6	Složená funkce	173
5.5	Úlohy k procvičení	175
6	Diferenciální počet funkcí jedné proměnné	177
6.1	Zavedení pojmu derivace funkce	177
6.2	Derivace složených funkcí	184
6.3	Derivace vyšších řádů	187
6.4	Derivace funkce $f(x)^{g(x)}$	187
6.5	L'Hospitalovo pravidlo	188
6.6	Funkce spojité na intervalu	190
6.7	Věty o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$	192
6.8	Funkce monotónní na intervalu a lokální extrém	194
6.9	Globální extrém	199
6.10	Konvexnost a konkávnost funkce	200
6.11	Průběh funkce	206
6.12	Diferenciál a Taylorova věta	212
6.13	Řešené příklady a aplikace	215
6.14	Úlohy k procvičení	225
7	Neurčitý integrál	231
7.1	Primitivní funkce	231
7.2	Metoda per partes (po částech)	236
7.3	Výpočet neurčitého integrálu substitucí	238
7.3.1	Racionální lomená funkce a její rozklad	244
7.3.2	Rozklad reálné ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků	245
7.3.3	Integrace racionální lomené funkce	248
7.3.4	Integrace některých významných tříd funkcí	255
7.4	Úlohy k procvičení	259
8	Určitý integrál	261
8.1	Zavedení Riemannova integrálu	262
8.2	Vlastnosti Riemannova integrálu	265
8.3	Existence Riemannova integrálu	266
8.4	Výpočet Riemannova integrálu	267
8.4.1	Metoda per partes a substituční metoda pro výpočet určitého integrálu	268
8.5	Nevlastní integrály	272
8.5.1	Integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$	272
8.5.2	Integrál $\int_{-\infty}^b f(x) dx$	274
8.5.3	Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	275
8.6	Nevlastní integrály vzhledem k funkci	275

8.7	Numerický výpočet určitého integrálu	277
8.7.1	Obdélníková metoda výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	278
8.7.2	Lichoběžníková metoda na výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	278
8.7.3	Simpsonova metoda výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	279
8.8	Řešené příklady a aplikace	281
8.9	Úlohy k procvičení	289
9	Funkce více proměnných	294
9.1	Parciální derivace	301
9.2	Extrémy funkcí více proměnných	304
10	Vícerozměrné integrály	310
10.1	Substituční metoda pro výpočet dvojného integrálu	318
10.1.1	Substituční metoda pro dvojný integrál	318
11	Kombinatorika	324
11.1	Dvě kombinatorická pravidla	324
11.1.1	Pravidlo součinu	324
11.1.2	Pravidlo součtu	326
11.2	Permutace bez opakování	326
11.3	Variace bez opakování	330
11.4	Kombinace bez opakování	332
11.5	Variace s opakováním	336
11.6	Permutace s opakováním	337
11.7	Kombinace s opakováním	339
11.8	Úlohy k procvičení	340
Literatura		342
Glosář		345
Použité zkratky		350
Summary		352

Seznam obrázků

1.1	Znázornění množiny M	23
1.2	Znázornění množiny M a jejích prvků	24
1.3	Znázornění komplementu množiny A	24
1.4	Znázornění množiny $A - B$	24
1.5	Znázornění sjednocení $A \cup B$	25
1.6	Znázornění průniku $A \cap B$	25
1.7	Vennův diagram	27
1.8	Vennův diagram	28
2.1	Číselná osa	38
2.2	Intervaly	42
2.3	K poznámce 2	44
2.4	Komplexně sdružená čísla	50
2.5	Rozdělení komplexních čísel	52
3.1	Násobení matic	70
3.2	Výpočet determinantu matice 2. řádu	89
3.3	Výpočet matice S_1 (první část determinantu matice 3. řádu)	90
3.4	Výpočet matice S_2 (druhá část determinantu matice 3. řádu, kterou od první části odečteme)	91
3.5	Výpočet determinantu matice 3. řádu s přidáním prvních dvou řádků	91
4.1	Body reprezentující členy posloupnosti	108
4.2	Znázornění posloupnosti	108
4.3	Znázornění vkladů	110
4.4	Znázornění vkladů	112
4.5	Ilustrace řešení pomocí Excelu	114
4.6	Ilustrace řešení pomocí Excelu – inflace vyjádřená v procentech je 2,596 %	114
4.7	První členy posloupnosti $\{1/n\}$	115
4.8	Ilustrace k řešení příkladu pomocí Excelu	122
4.9	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	131
4.10	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	131
4.11	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	132
4.12	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	132
4.13	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	133

4.14	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	133
5.1	Zobrazení F množiny A do B	142
5.2	Souřadnice bodu	144
5.3	Graf paraboly $y = x^2$	145
5.4	Graf závislosti podílu seniorů na populaci v jednotlivých letech	146
5.5	Graf závislosti počtu prodaných koloběžek v jednotlivých dnech	147
5.6	Graf funkce $y = \frac{1}{x}$	150
5.7	$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \alpha$	151
5.8	$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$	152
5.9	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$	152
5.10	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	153
5.11	Znaménko funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6$	156
5.12	Zobrazení f množiny A do B a zobrazení f^{-1} množiny B do A	157
5.13	Zobrazení f množiny A do B a zobrazení k němu inverzní	157
5.14	Graf lineární funkce	160
5.15	Kořeny polynomu 2. stupně	163
5.16	Vlevo graf funkce $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, vpravo graf funkce $y = x^3$ a $y = \sqrt[3]{x}$ pro $x \geq 0$	165
5.17	Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $a > 1$	166
5.18	Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $0 < a < 1$	167
5.19	Úhel v obloukové míře	168
5.20	Vztah mezi velikostí úhlu ve stupních a v obloukové míře	168
5.21	Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{ctg} x$	170
5.22	Graf funkce $\sin x$	170
5.23	Graf funkce $\cos x$	171
5.24	Graf funkce $\operatorname{tg} x$	172
5.25	Graf funkce $\operatorname{ctg} x$	172
5.26	Graf funkce $\arcsin x$	173
5.27	Graf funkce $\arccos x$	173
5.28	Složené zobrazení	174
6.1	Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$	178
6.2	Funkce s lokálním maximem v bodech a a b a lokálním minimem v bodě c	191
6.3	Absolutní extrémy na $\langle a, b \rangle$	191
6.4	Porušení předpokladů věty 6.6.1	192
6.5	Derivace – směrnice tečny ($f'(a) > 0$)	192
6.6	Derivace jako směrnice tečny ($f'(a) < 0$)	193
6.7	Interpretace věty 6.7.1	193
6.8	Monotónnost funkce $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5$	195
6.9	$f(x)$ má v x_0 derivaci	195
6.10	$f(x)$ nemá v x_0 derivaci	196
6.11	Tvar plechu na krabici	200
6.12	Zavedení funkce $\Phi(x)$ v bodě a	201
6.13	Funkce $f(x)$ má v bodě $T[a, f(a)]$ inflexní bod	201
6.14	Funkce ryze konvexní na intervalu I	203

6.15	Funkce ryze konkávní na intervalu I	204
6.16	Funkce konvexní na intervalu I	204
6.17	Funkce konkávní na intervalu I	205
6.18	Konkávnost, konvexnost a inflexní bod funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$	205
6.19	Konvexnost funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$	206
6.20	Konkávnost, konvexnost a inflexní bod funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$	206
6.21	Asymptoty bez směrnice $-x = \frac{1}{2}$	207
6.22	Asymptota se směrnicí v bodě ∞	207
6.23	Náčrtek grafu funkce $\frac{2x+1}{x(x+1)}$	211
6.24	Prodej zboží	211
6.25	Význam diferenciálu	212
6.26	Lineární poptávková funkce, $P = aQ + b$	215
6.27	Dokonale neelastická poptávka	216
6.28	Dokonale elastická poptávka	216
6.29	Lokální minimum funkce TC v bodě $Q = 420$	219
8.1	Význam $s(f, D_5)$	262
8.2	Význam $S(f, D_5)$	263
8.3	Význam $\int_a^b f(x) dx$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$	265
8.4	Funkce po částech spojitá	266
8.5	Definice nevlastního integrálu $\int_a^\infty f(x) dx$	273
8.6	Aproximace $f(x)$ polynomem $P_3^i(x)$	280
8.7	Graf rozložení bohatství v populaci	286
8.8	Výpočet Giniho koeficientu	286
9.1	Průměty bodů	295
9.2	Vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$ o úrovních 1 a 4	295
9.3	Vzdálenost bodů v $\mathbb{R}^2$ a Pythagorova věta	296
9.4	Okolí $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \varrho(A, X) \leq \delta\}$	296
9.5	Množina M	297
9.6	Hromadný bod Y	297
9.7	Limita funkce v bodě A	300
9.8	Nevlastní limita v bodě A	301
9.9	Geometrický význam parciálních derivací	302
9.10	Extrémy funkcí více proměnných	304
9.11	Uzavřená oblast	308
10.1	Dílek $D_{i,j}$ obdélníku D	310
10.2	Kvádr s podstavou $D_{i,j}$ a výškou $h_{i,j}$	311
10.3	Součet objemů kvádrů	311
10.4	Uzavřená oblast ω	312
10.5	Normální uzavřená oblast vzhledem k ose x	313
10.6	Normální uzavřená oblast vzhledem k ose y	314
10.7	Oblast D	314

10.8	Oblast D	315
10.9	Oblast D	316
10.10	Obdélníkový průřez	317
10.11	Oblast D	317
10.12	Regulární oblast $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	318
10.13	Polární souřadnice	319
10.14	Ilustrace k příkladu 288: vlevo oblast A , napravo oblast B	320
10.15	Oblast A	321
10.16	Oblast A_t (vlevo) a oblast B_t (vpravo)	322
10.17	Oblast A	322
10.18	Oblast A_n	323
11.1	Schéma rozhodování při objednávce	325
11.2	Do libovolné buňky napíšeme vzorec permutace(n;r)	328
11.3	Výsledek je uveden ve formě vědeckého zápisu	328
11.4	Úprava formátu	328
11.5	Výsledek permutace	329
11.6	Schéma zasedacího pořádku	330

Seznam tabulek

1.1	Tabulka pravdivostních hodnot	29
3.1	Ukazatele z Výběrového šetření pracovních sil (2011)	63
3.2	Inflace [%]	68
3.3	Nezaměstnanost [%]	68
5.1	Vztah mezi velikostmi úhlů ve stupních a v radiánech	168
6.1	Derivace elementárních funkcí	181
7.1	Tabulka význačných neurčitých integrálů	234
8.1	Rozložení bohatství mezi dětmi	285
11.1	Výpis všech uspořádaných trojic	332
11.2	Uspořádané trojice bez opakování	333
11.3	Výpis všech uspořádaných čtveřic	337
11.4	Výběr permutací s opakováním	337
11.5	Schematické znázornění všech uspořádání 6 ks pralinek dvou druhů	339

O autorech

RNDr. Luboš Bauer, CSc.

Absolvoval Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity, kde v roce 1989 získal titul kandidáta věd v oboru algebra a teorie čísel (práce Asociativní schemata, koherentní konfigurace a buňkové algebry). V letech 1978–1982 působil jako odborný pracovník Výzkumného ústavu elektrických strojů točivých, v letech 1986–1991 v Ústavu výpočetní techniky MU. Od této doby se zabývá také otázkami využití e-learningu ve výuce matematiky. Po roce 1991 spoluzakládal Katedru aplikované matematiky a informatiky Ekonomicko-správní fakulty MU, jejímž je od roku 2008 vedoucím. Je aktivně činný v akademické obci i jako člen Akademického senátu MU.

Hana Lipovská

Studuje obor Hospodářská politika na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde také působila v letech 2011–2012 jako externí pracovnice Katedry aplikované matematiky a informatiky. Její práce *Teorie her v ekonomii* (2010) získala několik ocenění ve studentských soutěžích (např. cena Merkur soutěže Česká hlavička), na jejichž základě čerpala grant PPNS JCMM. Ve své činnosti se zaměřuje na problematiku lidského kapitálu, ekonomie růstu a metodologie vědy. Externě spolupracuje s Českým statistickým úřadem a MŠMT ČR. Je řádnou členkou České společnosti ekonomické, Jednoty českých matematiků a fyziků a The American Economic Association.

doc. RNDr. Miloslav Mikulík, CSc.

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu MU v Brně. Později získal titul kandidáta věd a habilitoval se. Jeho první práce patřily do oblasti algebry. Pracoval ve výzkumném ústavu, kde se zabýval řešením technických aplikací matematiky a zaváděním výpočetní techniky do praxe. Výzkumnou a publikační činnost v oblasti numerických metod (splajny) rozvíjel na pozici samostatného vědeckého pracovníka během působení v Akademii věd. Tři roky působil jako assistant professor na univerzitě v Kuvajtu. V roce 1991 se podílel na institucionalizaci Katedry aplikované matematiky a informatiky nově vznikající Ekonomicko-správní fakulty MU, kde od té doby nepřetržitě pedagogicky působí.

Ing. Vít Mikulík

Je absolventem Fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně, oboru Konstrukce a dopravní stavby. Matematice se věnoval již jako student v matematické třídě i jako účastník olympiád. Svou odbornou pracovní a vědecko-výzkumnou činnost zaměřil na matematické řešení problémů aplikované mechaniky. Na MU v Brně se zapojil do několika projektů. Jako vysokoškolský pedagog na VUT v Brně je tvůrcem e-learningových kurzů. Aktivně se účastní četných konferencí a seminářů.

Úvodní slovo recenzenta

Publikaci *Matematika v ekonomii a ekonomice* lze považovat za základní učební text matematiky pro studenty ekonomie.

Kniha je vhodně uspořádána do jedenácti kapitol. Výklad začíná připomenutím základních matematických pojmů. Postupně jsou uvedena další témata až po násobné integrály. Poslední kapitola je věnována užitečnému nástroji v počtu pravděpodobnosti – kombinatorice.

Každá kapitola začíná motivačním příkladem, pro jehož řešení je pak vybudována matematická teorie. Výklad sice nezahrnuje precizní matematické důkazy, ale ukazuje užití získaných matematických dovedností k řešení praktických úloh. Zejména lze ocenit, že součástí každé kapitoly jsou aplikace, které se zabývají řešením konkrétních ekonomických problémů. Navíc je u každé kapitoly uvedeno shrnutí a úlohy k procvičení.

Kniha poutavým způsobem ukazuje, jak lze matematické znalosti využívat a zejména jak se lze s jejich pomocí vypořádat s ekonomickou teorií a praxí.

Recenzovaná publikace je sice primárně určena pro studenty ekonomie, ale je vhodná i pro studenty jiných nematematických oborů.

prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.

Ústav matematiky a statistiky

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

Předmluva

Vysokoškolští studenti ekonomie (a ekonomové obecně) většinou patří do jedné ze dvou skupin. První je tvořena těmi, kteří si zvolili studium ekonomie, **protože** je v něm potřeba matematiky. Pokud do této skupiny patříte, pak vám blahopřejeme – ocitli jste se ve společnosti takových ekonomických titánů, jakými byli Milton Friedman, Gary Becker nebo Paul Samuelson. Nikoli náhodou se jedná o laureáty Nobelovy ceny. Pokud si budete chtít přechíst jejich odborné práce, zjistíte, že se bez důkladné znalosti matematiky neobejdete. Do této prvotřídní skupiny jste se pravděpodobně dostali po úspěšné maturitě z matematiky a možná i oceněních z matematických olympiád. Základní vysokoškolské kurzy matematiky pro vás nepředstavují nic obtížného – derivovat a integrovat jste se naučili už na střední škole a s matematici si poradíte v přestávce mezi přednáškami mikroekonomie a financí.

Do druhé skupiny se řadí ti, kteří šli ekonomii studovat, **přestože** je v ní potřeba matematiky. Tito „nešťastníci“ věnují nesmírné úsilí přípravě na závěrečnou zkoušku a po jejím absolvování si z hloubi srdce oddechnou, že už symboly pro limity a integrál (nemluvě o těch podivných hieroglyfech z parciálních derivací) nikdy neuvidí.

Ať už jste se poznali v kterékoliv ze zmíněných skupin, dříve nebo později se nejspíš zeptáte, k čemu vám studium matematiky je. Kde je spojitost mezi derivací a mikroekonomií? K čemu vám poslouží inverzní matice v běžném životě? Proč se ve financích používá Eulerovo číslo? Co mají společného časové řady a peněžní multiplikátor? Pokud si tyto otázky nepoložíte, učiní tak za vás přednášející ve většině kurzů od mikroekonomie a makroekonomie, přes ekonomii práce a veřejnou ekonomii až po statistiku a ekonometrii. Ve všech těchto kurzech na vás ze stránek učebnic tu a tam vykouknou střípky matematiky zakuklené do ekonomických problémů.

Tato kniha je určena nejen pro všechny, kteří se chtějí naučit matematiku s cílem úspěšného složení zkoušky, ale také pro ty, kteří chtějí lépe porozumět ekonomii. Například kytarista nepotřebuje umět vyrobit kytaru, aby na ni dokázal skvěle hrát. Přesto si své kytary nejen nesmírně váží, ale zároveň se snaží porozumět jednotlivým prvkům hudebního nástroje. Skutečný virtuos rozumí hudebnímu nástroji víc, než mnozí okolo tuší. Podobně i pro vás jako budoucí ekonomy je matematika nástrojem. Krásným a dokonalým, ale stále jen prostředkem ke snadnějšímu řešení obtížných ekonomických problémů. Nutno však podotknout, že bez tohoto nástroje se virtuosi v ekonomii nestanete. V této knize vás ušetříme detailního rozboru všech součástí, z nichž je nástroj (matematika) vyroben. Nebudeme vás zatěžovat důkazy a postupy, které pro vás nejsou nezbytně nutné. Pokud budete v některých oblastech hledat odpověď na otázku „Proč to tak je?“, odkážeme vás na řadu vynikajících, ale již náročnějších matematických knih, které se zabývají ryze teoretickými aspekty vědy. Nepřistupujeme

k matematice jako k vědě, ale raději vás provedeme tím, jak a kdy jednotlivé matematické dovednosti používat a především jak se s jejich pomocí vypořádat s ekonomickou teorií a praxí.

Kniha je členěna do relativně samostatných kapitol, které pokrývají všechny základní oblasti ekonomické matematiky. Poslední kapitola – kombinatorika – nebývá součástí výuky, poznatky z ní však využijete při studiu teorie pravděpodobnosti v kurzech statistiky. Součástí kapitol jsou aplikace, které se zabývají konkrétními ekonomickými problémy, při jejichž řešení využíváme diskutované nástroje. Všechny kapitoly jsou uzavřeny závěrečným shrnutím a úlohami. Více než tři stovky řešených příkladů vám pomohou lépe pochopit vysvětlenou látku a ekonomické aplikace.

Naším cílem (a jistě se shodneme s vašimi vyučujícími) není, aby se z vás staly dokonalé lidské multifunkční kalkulačky. Byli bychom rádi, abyste pochopili podstatu matematických nástrojů a viděli, kdy který z nich použít. V běžném profesním životě budete pro zdoluhavé mechanické postupy využívat výpočetní techniku. Výsledek tak získáte nepoměrně rychleji než ručním výpočtem a navíc minimalizujete riziko chyby. Seznámíme vás proto i s postupy řešení numericky složitějších příkladů pomocí počítače. Existuje řada komerčních i volně dostupných softwarů, které jsou pro řešení matematických problémů vhodné (v ekonomii patří mezi velmi užitečné např. Matlab, který je vyučován na mnoha českých fakultách). Nechtěli jsme však znevýhodňovat ty studenty, kteří se nikdy nesetkali s programováním, proto používáme široce rozšířený tabulkový procesor Microsoft Excel (verze 2010). Jeho výhodou je snadné ovládání, během svého profesního života se s ním navíc budete setkávat nejčastěji. Nevýhodou je, že se jedná o komerční, a tedy placený produkt. Většina popsaných funkcí je však součástí volně dostupných softwarů obdobného charakteru.

Při řešení ekonomických problémů používáme tradiční ekonomické zkratky a symboly. Pokud jste se s některým označením proměnné či funkce nesetkali, můžete nahlédnout do seznamu zkratek na konci publikace. Neocenitelnou studijní pomůckou pro většinu z nás je internet, přičemž přesnější odpověď na konkrétní problém častěji najdeme na anglických webových stránkách nebo v odborných časopisech (také publikovaných většinou v angličtině). Pro snazší orientaci proto v této knize naleznete také česko-anglický glosář pojmů, s nimiž se během studia matematiky setkáte.

Knihu *Matematika v ekonomii a ekonomice* jsme psali v první řadě pro studenty. Tomu jsme podřídili volbu témat příkladů, častější opakování základních vztahů, styl i jazyk (vynasnažili jsme se nepoužívat v matematice kanonické, ale běžnému smrtelníkovi těžko srozumitelné pojmy a obraty). Přesto věříme, že tuto publikaci využijí i vyučující – zejména jako zdroj námětů k propojení matematické teorie s pestrá praxí ekonomie a ekonomiky. Zároveň jsme přesvědčeni, že kniha je vhodná i pro studium matematiky v oborech, které nejsou primárně zaměřeny na ekonomii a ekonomiku.

Přejeme vám, ať vás vaše studium matematiky dovede k objevování nových obzorů a obdivování netušených souvislostí. Kéž přispěje do mozaiky vašeho vzdělání, ať už je specializováno jakkoli. Kéž i ekonomické vztahy a především ekonomický styl myšlení se pro vás na základě matematiky objeví v nové dimenzi.

Vaši autoři

Kapitola 1

Připomenutí základních znalostí z matematiky

Pojem množina je základním pojmem v matematice. Proto si jej hned v úvodu připomeneme. Ukážeme si též některé množinové operace a vysvětlíme pojem výroku. Dále se budeme zabývat výrokovou logikou a základy výstavby matematiky.

1.1 Množina

Pojem množina je základním pojmem matematiky. Pro naše účely je postačující chápat množinu jako *soubor navzájem odlišitelných objektů*. Objektem může být cokoliv (číslo, písmeno, stát, člověk atd.). O každém objektu se musí dát rozhodnout, zda do uvažované množiny patří nebo nepatří. Množiny si zavádíme dle potřeby, většinou tak, aby všechny objekty množiny měly společné jisté vlastnosti. Některé speciální množiny mají ustálené označení. Např. množina přirozených čísel se značí $\mathbb{N}$, množina racionálních čísel se značí $\mathbb{Q}$ atd. Objektům z množiny budeme říkat *prvky*, resp. *elementy množiny*. Množiny budeme značit většinou velkými písmeny, jejich prvky malými písmeny. Okolnost, že objekt x je prvkem množiny A , budeme zapisovat jako $x \in A$. Okolnost, že objekt y nepatří do množiny A , budeme zapisovat jako $y \notin A$. Množiny, které obsahují konečný počet prvků, konečné množiny, můžeme zapisovat výčtem, to znamená, že jednotlivé prvky zapíšeme do složených závorek nezávisle na pořadí a oddělíme je navzájem čárkami. Jako příklad uved' me množinu A , jejíž prvky jsou písmena a, b, c . Tuto množinu zapíšeme tedy jako

$$A = \{a, b, c\}.$$

Přitom nezáleží na pořadí zápisu jednotlivých prvků. Uvedenou množinu A lze tedy zapsat též např. ve tvaru

$$A = \{c, b, a\}.$$

Zápis

$$B = \{a, b, c, c, a\}$$

není zápis množiny, neboť v zápisu jsou písmena a, c uvedena dvakrát.

Mezi množiny počítáme i množinu, která neobsahuje žádný prvek. Nazýváme ji *prázdná množina* a značíme ji $\emptyset$. Příkladem prázdné množiny je množina všech mužů starších 200 let žijících v současné době v Brně.

Konstanta, proměnná. Objekty můžeme označit symboly. To jednak zjednodušuje vyjadřování, jednak umožňuje stručný zápis některých výpovědí o objektech množiny. Zaveďme si nyní dva pojmy, se kterými se budeme často setkávat: konstanta a proměnná.

V této kapitole se pracuje s pojmy jako přirozené nebo reálné číslo, které jsou intuitivně známy. Podrobněji o nich bude pojednáno v kapitole 2 (Čísla).

Každý konkrétní prvek množiny nazýváme *konstanta*. Příkladem je např. symbol π z množiny reálných čísel, kterým označujeme konkrétní reálné číslo – Ludolfovo číslo.

Jestli symbol může nabývat kteroukoliv konstantu z dané množiny M , nazýváme jej *proměnnou*. Množinu konstant, kterých může tato proměnná nabývat, nazýváme *oborem proměnné*. Jestliže tedy označíme symbolem x proměnnou s oborem M , potom vše, co se řekne o x , se vztahuje na každý prvek množiny M . Uveďme si tento příklad.

Příklad 1. *Mějme množinu $P = \{2, 3, 5\}$. Označme x proměnnou s oborem hodnot P . Potom je tvrzení „Jestliže $x \in P$, pak $x^2 \leq 25$ “ pravdivé pro každé $x \in P$. Skutečně, $2^2 \leq 25$, $3^2 \leq 25$ a též $5^2 \leq 25$.*

Podmnožina. Necht' M , N jsou dané množiny. Jestliže každý prvek množiny M je i prvkem množiny N , potom říkáme, že množina M je podmnožinou množiny N , nebo že množina N je nadmnožinou množiny M . Píšeme pak $M \subseteq N$, resp. $N \supseteq M$. Jestliže zároveň platí $M \subseteq N$ a $M \supseteq N$, potom říkáme, že množiny M , N se sobě rovnají a píšeme $M = N$. Jestliže $M \subseteq N$ a jestliže množina N obsahuje prvky, které do množiny M nepatří, říkáme, že množina M je *vlastní podmnožinou* množiny N a píšeme $M \subset N$, resp. N je *vlastní nadmnožinou* M a píšeme $N \supset M$. Je-li tedy $M \subset N$, je též $M \subseteq N$, avšak je-li $M \subseteq N$, nemusí být $M \subset N$.

Příklad 2. *Jestliže $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel, potom množina M celých čísel dělitelných číslem 2 je její podmnožinou.*

Příklad 3. *Jestliže $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel, potom množina M přirozených čísel menších než 6, tj. čísel 1, 2, 3, 4, 5, je podmnožinou množiny $\mathbb{N}$.*

Příklad 4. *Necht' $M = \{1, 4, 3, 9\}$. Potom $\{1, 3\} \subset M$, avšak $\{3, 7\}$ není podmnožinou množiny M , neboť prvek 7 není prvkem M .*

Všimněme si dvou významově i formálně odlišných zápisů. Necht' $M = \{1, 4, 3, 8\}$. Potom zápis $8 \in M$ znamená, že 8 je prvkem množiny M , a zápis $\{8\} \subset M$ znamená, že množina, obsahující jediný prvek 8, je vlastní podmnožinou množiny M .

Ukažme si nyní následující způsob zavedení podmnožiny dané množiny. Začneme s příkladem. Označme x proměnnou s oborem hodnot přirozených čísel $\mathbb{N}$. Každý prvek $x \in \mathbb{N}$ buď splňuje podmínku $x < 5$, nebo ji nesplňuje. Podmínku $x < 5$ označme $V(x)$ a nazvěme charakteristickou vlastností proměnné x . Množinu těch prvků z $\mathbb{N}$, které vyhovují podmínce $V(x)$, označme P . Budeme ji zapisovat jako

$$P = \{x \in \mathbb{N} : V(x)\}.$$

Tímto zápisem je definována množina $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

Příklad 5. Necht' $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ je množina šesti mužů. Označme *muz* proměnnou s oborem hodnot M . Označme $K(\text{muz})$ vlastnost, že muž má oblečenu bílou košili. Tedy $K(\text{muz})$ je charakteristická vlastnost proměnné *muz*. Tedy

$$S = \{\text{muz} \in M : K(\text{muz})\}$$

je množina těch mužů z množiny M , kteří mají oblečenou bílou košili.

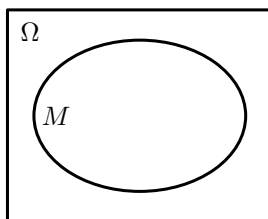
Podobně můžeme definovat podmnožinu Q množiny P následujícím způsobem. Necht' x je proměnná s oborem hodnot P . Necht' $V(x)$ je charakteristická vlastnost definovaná pro všechna $x \in P$. Potom množinu Q těch prvků $x \in P$, které mají vlastnost $V(x)$, zapisujeme jako

$$Q = \{x \in P : V(x)\}. \quad (1.1)$$

1.1.1 Množinové operace

Necht' je dána množina Ω . Pracuje-li se jen s prvky množiny Ω a s jejími podmnožinami, nazveme Ω základním prostorem. K usnadnění práce s množinami bývá zvykem používat grafické znázornění množin. Základní prostor budeme označovat obdélníkem. Podmnožiny množiny Ω budeme znázorňovat rovinnými obrazci, např. kruhy, ovály, obdélníky ležícími v obdélníku Ω , znázorňujícím základní prostor. Rovinným obrazcem můžeme znázornit i množinu, která obsahuje jenom konečný počet prvků. Každý bod obrazce nemusí být prvkem množiny, kterou rovinný obrazec reprezentuje. Elementy množiny můžeme v případě potřeby znázornit nějakým symbolem, např. symbolem „+“. Do obrazce znázorňujícího nějakou množinu můžeme zapsat i nějaké údaje, např. číslo udávající počet prvků množiny. Pokud není nebezpečí omylu, můžeme pro zjednodušení vynechat základní prostor.

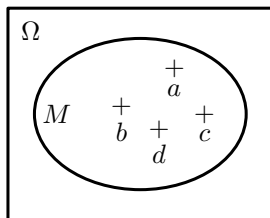
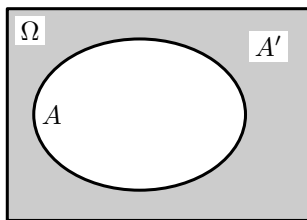
Příklad 6. Uvažujme základní prostor Ω a jeho podmnožinu $M = \{a, b, c, d\}$. Na obr. 1.1 je znázorněn základní prostor Ω a množina M bez údajů. Na obr. 1.2 je znázorněn základní prostor Ω a množina M s vyznačením jejich čtyř prvků a, b, c, d .



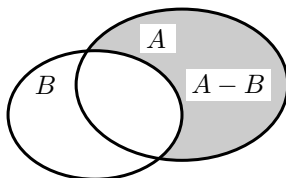
Obrázek 1.1: Znázornění množiny M

Komplement množiny. Necht' Ω je základní prostor a $A \subseteq \Omega$. Potom množinu, označme ji A' , těch prvků z Ω , které nepatří do A , nazýváme komplementem množiny A . Na obr. 1.3 je vyznačena jak množina A , tak i množina A' . Množina A' je šedá.

Příklad 7. Necht' základním prostorem je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ a necht' $A \subset \mathbb{N}$ je její podmnožina sudých čísel. Potom komplementem množiny A je množina A' lichých čísel.

Obrázek 1.2: Znáznornění množiny M a jejích prvkůObrázek 1.3: Znáznornění komplementu množiny A

Rozdíl dvou množin. Necht' A, B jsou dané množiny. Potom množinu C těch prvků množiny A , které nepatří do množiny B , nazýváme rozdílem množin A, B v tomto pořadí a značíme $A - B$ resp. $A \setminus B$. Na obr. 1.4 je znázorněn rozdíl $A - B$. Tato množina je vyznačena šedou barvou.

Obrázek 1.4: Znáznornění množiny $A - B$

Sjednocení dvou množin. Necht' A, B jsou dvě množiny. Potom množinu C těch prvků, které patří do množiny A , resp. do množiny B , případně do obou zároveň, nazýváme sjednocením množin A, B . Píšeme pak

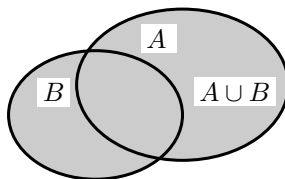
$$C = A \cup B.$$

Na obr. 1.5 je množina $A \cup B$ vybarvena šedě. Jestli např. $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, potom $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$.

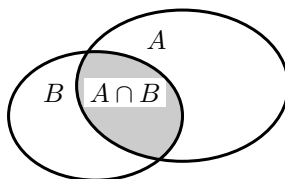
Průnik dvou množin. Mějme dvě množiny A, B . Potom množinu C těch prvků, které patří jak do množiny A , tak i do množiny B , nazýváme průnikem množin A, B . Píšeme pak

$$C = A \cap B.$$

Na obr. 1.6 je množina $A \cap B$ šedá. Jestliže například $A = \{1, a, b, c\}, B = \{b, 1, 2, 3, 4\}$, potom $A \cap B = \{b, 1\}$.



Obrázek 1.5: Znáznornění sjednocení $A \cup B$



Obrázek 1.6: Znáznornění průniku $A \cap B$.

Disjunktní množiny, incidentní množiny. Jestliže je $A \cap B = \emptyset$, nazýváme množiny A, B disjunktní. Jestliže $A \cap B \neq \emptyset$, nazýváme množiny A, B incidentní.

Příklad 8. Mějme množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e, f, g\}$, $C = \{h, m\}$. Potom

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}, \quad A \cap B = \{a, c\}, \quad A \cap C = \emptyset.$$

Množiny A, B jsou incidentní, množiny A, C jsou disjunktní.

Pravidla pro operace s množinami. Pro každé tři množiny A, B, C platí následující vztahy:

1. Sjednocení množin je operace komutativní a asociativní, tj.

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

2. Průnik množin je operace komutativní a asociativní, tj.

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Pro operace sjednocení a průnik platí distribuční zákony, tj.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Platí de Morganova pravidla

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Kartézský součin dvou množin. Mějme dvě množiny A , B . Kartézským součinem $A \times B$ (v tomto pořadí) rozumíme množinu C vytvořenou všemi uspořádanými dvojicemi $[x, y]$, kde $x \in A$ a zároveň $y \in B$. Tedy

$$A \times B = \{[x, y] : x \in A \text{ a zároveň } y \in B\}. \quad (1.2)$$

Označení. Necht' A je množina. Potom $A^2 = A \times A$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x, y \in A$. Kartézský součin dvou množin lze zobecnit na kartézský součin n množin $A_1, \dots, A_n$. Zapisujeme jej jako

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad (1.3)$$

a definujeme jej jako množinu všech uspořádaných skupin n prvků

$$[a_1, a_2, \dots, a_n], \text{ kde } a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Označení. Necht' A je množina. Potom

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \quad (1.4)$$

označíme množinu všech uspořádaných skupin o n prvcích z množiny A .

Příklad 9. Necht' $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Potom $A \times B = \{[a, \alpha], [a, \beta], [a, \gamma], [b, \alpha], [b, \beta], [b, \gamma]\}$.

1.1.2 Řešené příklady a aplikace

Slovní úlohy, které se zabývají počty prvků v libovolných množinách, můžeme řešit pomocí Vennových diagramů. Podle situace zvolíme diagram a vztahy mezi jednotlivými podmnožinami zapíšeme do rovnic. Získanou soustavu rovnic vyřešíme.

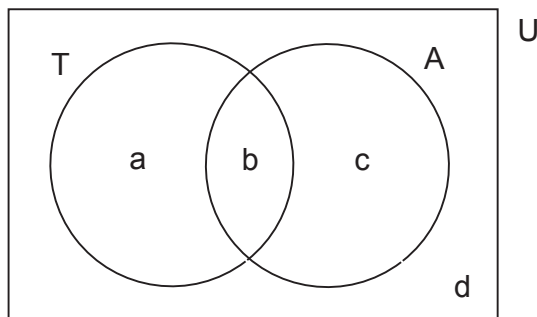
Označení: Jestliže A je konečná množina, tzn. že obsahuje konečný počet prvků, pak $|A|$ značí její mohutnost (počet jejích prvků).

Příklad 10. Ve městě proběhla anketa využívání dopravních prostředků – tramvají a autobusů – k cestě do zaměstnání. Ankety se účastnilo 2000 osob, tramvaj nebo autobus využívá 80 % z nich. Počet osob, které jezdí do práce jen tramvají, je stejný jako počet těch, kteří jezdí autobusem. Tramvají i autobusem jezdí o 200 lidí více než jiným dopravním prostředkem. Kolik oslovených osob jezdí do práce jen autobusem?

Řešení: Situaci si znázorníme pomocí Vennova diagramu (viz obr. 1.7), kde U značí množinu všech účastníků ankety, T množinu osob jezdících do práce tramvají a A množinu osob jezdících do práce autobusem. Průniky jednotlivých množin jsou na obrázku a mají tento význam: a – počet osob jezdících do práce jen tramvají, b – počet osob jezdících tramvají i autobusem, c – počet osob jezdících jen autobusem, d – počet osob jezdících jiným způsobem.

Ankety se účastnilo 2000 osob: $a + b + c + d = 2000 = |U|$. Tramvaj nebo autobus využívá 80 % z nich: $a + b + c = 0,8 \cdot 2000$. Počet osob, které jezdí do práce jen tramvají, je stejný jako počet těch, kteří jezdí autobusem: $a = b + c$. Tramvají i autobusem jezdí o 200 lidí více, než jiným dopravním prostředkem: $b = d + 200$. Získali jsme soustavu rovnic

$$2000 = a + b + c + d,$$



Obrázek 1.7: Vennův diagram

$$0,8 \cdot 2000 = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 1600, d = 400,$$

$$a = b + c,$$

$$b = d + 200 \Rightarrow b = 600.$$

Vyřešením jsme dostali: $a = 800$, $b = 600$, $c = 200$, $d = 400$. Jen autobusem jezdí do práce 200 oslovených účastníků ankety.

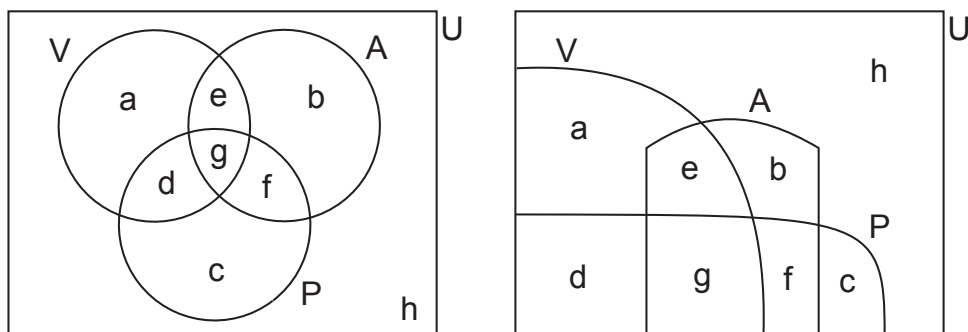
Příklad 11. O volné místo u auditorské společnosti se uchází 45 zájemců. Personalistka se rozhodla, že do užšího výběru zařadí pouze ty uchazeče, kteří splňují tři následující podmínky:

- vysokoškolské vzdělání,
- znalost anglického jazyka,
- počítačová gramotnost.

Životopis zaslalo do společnosti 40 vysokoškoláků, 28 zájemců ovládá angličtinu a 22 práci s počítačem. Pouze podmínku znalosti angličtiny bez znalosti práce na počítači splňuje 15 vysokoškoláků, celkem 19 vysokoškoláků je počítačově gramotných. Jeden žadatel s ukončeným středoškolským vzděláním ovládá práci na počítači i angličtinu a jeden žadatel nesplňuje žádnou ze stanovených podmínek. Kolik uchazečů bude pozváno k pohovoru?

Řešení: Situaci si znázorníme pomocí Vennova diagramu – viz obr. 1.8. Levý i pravý graf jsou různé způsoby vyjádření téže skutečnosti. Množina U je množina všech uchazečů o práci, množina V je množina všech vysokoškoláků, množina A jsou žadatelé, kteří ovládají angličtinu a množina P znázorňuje žadatele ovládající práci na počítači.

Průniky jednotlivých množin V , A a P jsou na obrázku znázorněny takto: a – počet vysokoškoláků, kteří neumějí anglicky ani neovládají počítač; b – počet anglicky mluvících uchazečů, kteří však nejsou vysokoškoláci a neumí ovládat počítač; c – počet uchazečů ovládajících práci na počítači, kteří však neumějí anglicky a nejsou vysokoškoláky; d – počet vysokoškoláků, kteří ovládají práci na počítači, ale neumí anglicky; e – počet vysokoškoláků, kteří umí anglicky, avšak neovládají práci na počítači; f – počet uchazečů mluvících anglicky a ovládajících práci na počítači, kteří ale nejsou vysokoškoláky; g – počet uchazečů, kteří jsou vysokoškoláky, zároveň umí anglicky i ovládají práci na počítači, tedy splňují všechna



Obrázek 1.8: Vennův diagram

kritéria a budou pozváni k ústnímu pohovoru; h – počet uchazečů, kteří nejsou vysokoškoláci, a neumí anglicky ani neovládají práci na počítači. Nyní si znovu pozorně přečteme text zadání a postupně vyjádříme všechny údaje pomocí proměnných a, b, c, d, e, f, g, h.

$$\begin{aligned}
 |U| &= 45 = a + b + c + d + e + f + g + h \\
 |V| &= 40 = a + d + e + g \\
 |A| &= 28 = b + e + f + g \\
 |P| &= 22 = c + d + f + g \\
 e &= 15 \\
 d + g &= 19 \\
 f &= 1 \\
 h &= 1 \\
 g &= ?
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vyřešením soustavy rovnic (1.6) nám vyjde $g = 11$. K ústnímu pohovoru bude pozváno 11 uchazečů o zaměstnání.

1.2 Výrokový počet

Výrokem rozumíme každou výpověď, o níž má smysl říci, že je pravdivá nebo nepravdivá. Při tom není rozhodující, zda dovedeme o pravdivosti rozhodnout nebo ne. Výroky budeme značit v této podkapitole většinou písmeny p, q . Je-li výrok p pravdivý, budeme psát $p \equiv 1$, je-li výrok p nepravdivý, budeme psát $p \equiv 0$. Např. výrok „6 je číslo sudé“ je výrok pravdivý, kdežto výrok „3 je číslo sudé“ je výrok nepravdivý. Výpověď „číslo x je sudé“ není výrokem, číslo x není konkrétně zadáno.

Složené výroky. Z daných výroků můžeme vytvářet nové výroky *negací a spojováním*. K vytváření složených výroků se používají tzv. *logické spojky*. Logickým spojkám se přiřazují dále uvedené symboly.

Negace výroku. Necht' p je výrok. Označme $\neg p$ výrok, který je pravdivý tehdy, jestliže výrok p je nepravdivý a je nepravdivý tehdy, jestliže p je pravdivý. Pro zápis negace výroku užíváme

symbol $\neg$. Výrok $\neg p$ čteme „není pravda, že (platí) p “. Např. negací výroku „tato tabule je černá“ dostáváme výrok „tato tabule není černá“.

Konjunkce výroků. Předpokládejme, že p, q jsou výroky. Označme $p \wedge q$ složený výrok, který je pravdivý tehdy, jsou-li oba výroky pravdivé, a nepravdivý, je-li alespoň jeden z nich nepravdivý. Složený výrok $p \wedge q$ čteme „ p a q “. Označme například písmenem p výrok „číslo 4 je sudé“. Dále označme písmenem q výrok „číslo 6 je liché“. Výrok $p \wedge q$ v našem příkladě je tedy výrok „číslo 4 je sudé a (zároveň) číslo 4 je liché“. V našem případě je $p \equiv 1, q \equiv 0$, takže $p \wedge q \equiv 0$.

Disjunkce výroků. Předpokládejme, že p, q jsou výroky. Označme $p \vee q$ složený výrok, který je pravdivý, je-li alespoň jeden z výroků p, q pravdivý, a je nepravdivý, jsou-li oba výroky p, q nepravdivé. Výrok $p \vee q$ čteme „ p nebo q “. Slovo „nebo“, které zde používáme, nemá vylučovací význam.. Pro disjunkci výroků používáme spojku $\vee$.

Uveďme tento příklad. Označme p výrok „číslo 3 je sudé“ a q výrok „číslo 4 je sudé“. Potom v našem příkladě je $p \vee q$ výrokem „číslo 3 je sudé nebo číslo 4 je sudé“. Tento výrok je pravdivý, neboť výrok „číslo 4 je sudé“ je pravdivý výrok. Výrok „grafem funkce $y = x + 2$ je přímka“ $\vee$ „grafem funkce $y = x + 2$ je parabola“ je pravdivý výrok, neboť je pravda, že grafem této funkce je přímka.

Implikace. Necht' p, q jsou výroky. Složený výrok $p \Rightarrow q$ je výrok, který je nepravdivý tehdy, jestliže je výrok p pravdivý a výrok q je nepravdivý, jinak je pravdivý. Výrok $p \Rightarrow q$ čteme „z p vyplývá q “, nebo „ p implikuje q “, nebo „jestliže p , potom q “ a podobně. Pro implikace používáme symbol $\Rightarrow$.

Označme p výrok „ $1 + 2 = 4$ “ a q výrok „ $5 + 6 = 0$ “, potom výrok „jestli platí p , potom platí q “ je pravdivý, neboť výrok p je nepravdivý.

Ekvivalence. Necht' p, q jsou výroky. Potom složený výrok $p \Leftrightarrow q$ je pravdivým výrokem právě tehdy, jsou-li současně oba výroky $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ pravdivé. Složený výrok $p \Leftrightarrow q$ čteme „ p platí, když a jenom když platí q “, nebo čteme „ p (platí) tehdy a jenom tehdy, když (platí) q “, nebo „ p je ekvivalentní s q “ a podobně.

V tab. 1.1 – nazveme ji tabulka pravdivostních hodnot – je uvedena pravdivost, resp. nepravdivost základních výroků.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

Příklad 12. Z výroků p, q vytvořte konjunkci, disjunkci, implikaci a ekvivalenci. Výrok p : „pan XY nepřijde v sobotu do práce“. Výrok q : „pan XY nepřijde v neděli do práce“.

Řešení: Konjunkce $p \wedge q =$ „Pan XY nepřijde do práce v sobotu ani v neděli.“. Disjunkce $p \vee q =$ „Pan XY nepřijde do práce v sobotu nebo v neděli.“. Implikace $p \Rightarrow q =$ „Jestliže pan XY nepřijde do práce v sobotu, nepřijde do práce ani v neděli.“. Ekvivalence $p \Leftrightarrow q =$ „Pan XY nepřijde do práce v neděli, když a jenom když nepřijde do práce v sobotu.“

Příklad 13. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot 1.1 ověřte ekvivalentnost výroků uvedených na jednom řádku následující tabulky.

$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$

Příklad 14. a) Negujte výrok: „Číslo 4 je sudé a současně číslo 4 je menší než 10.“ b) Negujte výrok: „Číslo 4 je dělitelné 2 nebo číslo 10 je dělitelné 2.“ c) Negujte výrok: „Je-li číslo a dělitelné 4, potom je dělitelné 2.“

Řešení: a) Jedná se o negaci konjunkce: „Číslo 4 není sudé nebo číslo 4 není menší než 10.“ b) Jedná se o negaci disjunkce: „Číslo 4 není dělitelné 2 a číslo 10 není dělitelné 2.“ c) Jedná se o negaci implikace: „Číslo a je dělitelné 4 a není dělitelné 2.“

Výrokové formy. Sdělení, které obsahuje jednu nebo více výrokových proměnných, se nazývá výroková forma, jestliže ze sdělení dostaneme výrok:

- dosazením přípustných konstant z oboru proměnných za tyto proměnné;
- kvantifikací, to je doplněním o údaj o počtu, resp. o odhad počtu konstant, jejichž dosazením za proměnné vznikne výrok.

Příklad 15. Sdělení „reálné číslo x je větší než 2“ není výrokem. Jde o výrokovou formu. Např. dosadíme-li za x číslo 3, dostáváme výrok „číslo 3 je větší než 2“.

Výrokovou formu závislou na proměnné x lze zapsat obecně např. jako $V(x)$.

1.2.1 Kvantifikátory

a) Obecný kvantifikátor. Necht' výroková forma $V(x)$ závisí na proměnné x a necht' M je daná množina. Okolnost, že výroková forma $V(x)$ je pravdivá pro všechna $x \in M$, zapíšeme jako

$$\forall x \in M : V(x) \quad (1.6)$$

a čteme *pro všechna $x \in M$ platí $V(x)$* . Výrokovou formu jsme v (1.6) doplnili údajem o počtu konstant (pro všechny konstanty z oboru proměnné x), pro něž je $V(x)$ pravdivým výrokem. (1.6) je tedy výrokem. Symbol „ $\forall$ “ nazýváme *obecným kvantifikátorem*.

Příklad 16. Necht' $M = \{2, 3, 4, 8\}$, x je proměnná s oborem M . Označme $V(x)$ výrokovou formu „ $x \geq 2$ “. Potom

$$\forall x \in M : x \geq 2$$

je pravdivý výrok. Podobně

$$\forall x \in M : x < 4$$

je nepravdivý výrok, neboť pro $x = 8$ je výrok $x < 4$ nepravdivý. Kvantifikací jsme dostali z výrokové formy $V(x)$ výrok.

b) Existenční kvantifikátor. Necht' výroková forma $V(x)$ závisí na proměnné x a necht' množina M je daná množina. Okolnost, že výroková forma $V(x)$ je pravdivá alespoň pro jedno $x \in M$, zapíšeme takto

$$\exists x \in M : V(x) \quad (1.7)$$

a čteme „existuje $x \in M$, pro něž platí $V(x)$ “. Výrokovou formu jsme v (1.7) doplnili o specifikaci počtu hodnot proměnné x , pro něž je $V(x)$ pravdivým výrokem (alespoň pro jedno $x \in M$). Symbol „ $\exists$ “ se nazývá *existenčním kvantifikátorem*.

Příklad 17. Necht' „ x je prvočíslo větší než 20“ je výroková forma s oborem hodnot $\mathbb{N}$. Potom

$$\exists x \in \mathbb{N} : x \text{ je prvočíslo větší než } 20 \quad (1.8)$$

je výrok.

Negace výroků (1.6), (1.7). Negací výroků (1.6), (1.7) dostáváme tyto ekvivalentní výroky:

$$\neg(\forall x \in M : V(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg V(x), \quad (1.9)$$

$$\neg(\exists x \in M : V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg V(x). \quad (1.10)$$

Příklad 18. Necht' $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel. Potom

$$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = -1 \quad (1.11)$$

je výrok. Čteme jej: „Existuje (alespoň jedno) přirozené číslo x , pro které platí $x^2 = -1$ “. Tento výrok je nepravdivý. Negací tohoto výroku podle vztahu (1.10) dostáváme

$$\forall x \in \mathbb{N} : \neg(x^2 = -1), \quad (1.12)$$

to je

$$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq -1. \quad (1.13)$$

Zřejmě (1.13) je pravdivý výrok.

Z výrokových forem lze vytvářet složené výrokové formy podobně jako z výroků složené výroky.

1.2.2 Řešené příklady a aplikace

Příklad 19. Které z následujících vět jsou výroky? Rozhodněte o jejich pravdivosti.

- John Maynard Keynes je nositelem Nobelovy ceny za ekonomii.
- Česká národní banka je výhradním emitentem českých bankovek a mincí.
- Jaká byla v roce 2008 inflace v České republice?
- Akcie, dluhopisy, směnky, šeky a opční listy patří mezi cenné papíry.
- Ztrátu platební karty nahlaste instituci, která ji vydala.
- Monopol maximalizuje přebytek spotřebitele.

g) Označení pro ekonomii pochází z řeckého *oikonomos* – správa domu.

h) Jednou z přímých daní je daň z přidané hodnoty (DPH).

i) Kéž by byla úroková sazba terminovaných vkladů alespoň 4 %.

Řešení: Věty *a, b, d, f, g, h*, jsou výroky. Výroky *b, d, g* jsou pravdivé.

1.3 Poznámky k výstavbě matematiky

Co jsou to axiomy? Při budování jednotlivých matematických disciplín se vychází z *postulátů* (axiomů). Výraz axiom pochází z řeckého slova *axiómo*. Axiomy jsou výchozí matematické výroky, které obsahují základní pojmy a vztahy mezi nimi. Považují se za pravdivé bez jakéhokoliv dalšího dokazování. Musí však být bezesporné, to znamená, že z nich nelze odvodit žádná tvrzení, která by současně nemohla platit. Musí být však na sobě nezávislá, žádný axiom tedy nelze odvodit z ostatních. Každé tvrzení v uvažované disciplíně se musí dát odvodit z dané soustavy axiomů. Jako ukázkou, *pouze pro informaci*, si uveďme dva z pěti geometrických axiomů, které uvedl ve svých „Základech“ řecký matematik Eukleidés. V nich jsou postulovány základní pojmy – bod, přímka, rovnoběžka. Uveďme tyto axiomy:

- Máme-li dány dva body, existuje jedna přímka, která jimi prochází.
- K dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.

Všimněme si, že např. bod, přímka, atd. nejsou blíže specifikovány, jsou určeny jenom axiomy – vztahy mezi jednotlivými základními pojmy.

Zavedení pojmu definice. Kromě základních pojmů existují pojmy, které se zavádějí na základě již dříve zavedených pojmů. Uveďme si dva příklady.

Příklad 20. Víme-li již, *co je to trojúhelník*, definujeme další pojem „*rovnostanný trojúhelník*“ následující definicí.

Definice: *Rovnostanný trojúhelník je takový trojúhelník, jehož strany jsou stejně dlouhé.*

Příklad 21. Víme-li, *co je to celé číslo*, zavedeme pojem *racionalní číslo* následující definicí.

Definice. Jestliže p, q jsou celá čísla, $q \neq 0$, potom číslo $\frac{p}{q}$ je „*číslo racionalní*“.

Poznámka. V této knize nebudeme zavádět pojmy axiomatically. Základní pojmy si pouze osvětlíme tak, jak jsme to udělali s pojmem množina.

Obrátme nyní svoji pozornost k pojmu matematická „věta“.

Pojem matematická věta. Stručně budeme říkat pouze věta. Matematická věta je *pravdivý výrok*, který se dá odvodit pomocí logiky užitím axiomů, definic a již dokázaných vět s využitím již zavedených pojmů. Uvedeme si příklady vět.

Příklad 22. Věta. Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka je roven 60° .

Jde skutečně o větu. Je to pravdivý výrok, který lze dokázat. Pojmy, které se zde vyskytují, musely být již dříve zavedeny. Tuto větu můžeme přeformulovat takto: Jestliže trojúhelník

je rovnostranný, potom každý jeho vnitřní úhel je roven 60° . Také by bylo možné definovat rovnostranný trojúhelník takto: „Trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou rovny 60° , se nazývá rovnostranný.“ Potom bychom mohli vyslovit větu: „Všechny strany rovnostranného trojúhelníka jsou stejně velké.“

Příklad 23. Věta. Necht' a, b, c jsou reálná čísla a necht' $c < 0, a < b$. Potom $a \cdot c > b \cdot c$.

První část věty „Necht' a, b, c jsou reálná čísla a necht' $c < 0, a < b$ “ jsou předpoklady, za nichž platí druhá část věty „ $a \cdot c > b \cdot c$ “.

Tedy definicí se zavádí nový pojem, kdežto matematická věta vypovídá o vzájemných vztazích mezi již zavedenými pojmy. Ukažme si několik často se vyskytujících tvarů matematických vět. Začneme s větou ve tvaru: „Necht' $V(x)$ je výroková forma proměnné x s oborem D “. Potom platí

$$\forall x \in D : V(x). \quad (1.14)$$

Slovy: „Pro všechna $x \in D$ platí $V(x)$ “.

Příklad 24. Jako příklad uveďme větu:

Věta. Pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}. \quad (1.15)$$

Tuto větu lze zapsat takto: Necht'

$$V(n) \equiv \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (1.16)$$

je výroková forma proměnné n s oborem $\mathbb{N}$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n).$$

Abychom mohli tento výrok prohlásit za větu, bylo by nutné ještě dokázat, že jde o pravdivý výrok.

Často se vyskytují věty typu:

Věta. Jestliže platí výrok 1, potom platí výrok 2.

Zde výrok 1 nazýváme postačující podmínkou k platnosti výroku 2. Výrok 2 nazýváme tvrzením věty.

Příklad 25. Jako příklad uvedeme větu:

Věta. Necht' pro strany a, b, c trojúhelníka platí vztah

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Potom je trojúhelník pravoúhlý.

V této větě je „v trojúhelníku o stranách a, b, c platí $c^2 = a^2 + b^2$ “ předpoklad a „trojúhelník o stranách a, b, c je pravoúhlý“ je tvrzení.

1.4 Úlohy k procvičení

Úloha 1. Co je to množina?

Úloha 2. Napište množinu A , jejíž prvky jsou písmena obsažená ve slově „matematika“.

a) Pro každé z písmen „a, b, c, i, j“ запиšte, zda patří nebo nepatří do množiny A .

b) Napište podmnožinu B množiny A , obsahující všechny samohlásky množiny A .

c) Co znamenají zápisy $B \subset A$, $B \subseteq A$?

[a) $A = \{m, a, t, e, i, k\}$, $a \in A$, $b \notin A$, $c \notin A$, $i \in A$, $j \notin A$, b) $B = \{a, e, i\}$,

c) B je vlastní podmnožinou množiny A ; B je podmnožinou množiny A .]

Úloha 3. Vysvětlete rozdíl mezi konstantou a proměnnou. Uveďte příklady.

Úloha 4. Co je to obor proměnné?

Úloha 5. Necht' $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, e\}$. Určete množiny a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A - B$.

[a) $\{a, b, c, e\}$, b) $\{a\}$, c) $\{b, c\}$]

Úloha 6. Co je to výrok a co je to výroková forma?

Úloha 7. Příмка $2x + 3y = 1$ rozděluje rovinu (x, y) na dvě poloroviny. Vyznačte, který z následujících výroků je pravdivý a který je nepravdivý.

a) Body $[1, 3]$, $[5, -2]$ leží v téže polorovině.

b) Body $[0, 2]$, $[3, -5]$ leží v téže polorovině.

[a) pravdivý, b) nepravdivý]

Úloha 8. Označme p , q tyto výroky:

- výrok p ... „číslo π je reálné“,

- výrok q ... „číslo 2 je přirozené číslo“.

Vyslovte výroky : a) $\neg p$, b) $\neg q$, c) $p \vee q$, d) $p \wedge q$ a uveďte jejich pravdivost.

[a) „Číslo π není reálné“ ($\equiv 0$), b) „Číslo 2 není přirozené“ ($\equiv 0$), c) „Číslo π je reálné nebo číslo 2 je přirozené“ ($\equiv 1$), d) „Číslo π je reálné a číslo 2 je přirozené“ ($\equiv 1$)]

Úloha 9. Necht' n je proměnná s oborem přirozených čísel. Je výpověď „ $n^2 > 4$ “ výrokem? [Není, jde o výrokovou formu.]

Úloha 10. Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel. Vyslovte následující výroky a uveďte jejich pravdivost.

a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > 1$,

b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 > 1$.

[Výrok a) je nepravdivý – pro $n = 1$ neplatí $n^2 > 1$. Výrok b) je pravdivý – pro $n = 2$ platí $n^2 > 1$.]

Kapitola 2

Čísla

Pojem čísla není tak jednoduchý, jak by se mohlo zdát na první pohled. Jeho přesné zavedení se vymyká našim možnostem a ani znalost jejich přesného zavedení není pro ekonomy nutná. Tuto kapitolu je proto možné chápat jen jako pokus o vytvoření náhledu na jeden způsob zavedení čísel a o připomenutí některých jejich vlastností. Zavádějí se zde i nevlastní čísla a některé pojmy související s číselnými množinami, jako např. supremum a infimum množiny. V této kapitole uvádíme též několik připomínek k numerickým výpočtům a opakujeme si některé úkony s čísly. Zopakujeme si též zavedení komplexních čísel. Součástí výkladu je několik příkladů. Pokud někdo bude mít potíže s jejich řešením, doporučujeme sbírky příkladů ze středoškolské matematiky.

2.1 Zavedení reálných čísel

Přirozená čísla. Historicky začali lidé používat nejdříve *přirozená čísla*. Dějiny přirozených čísel jsou dějinami ekonomie. Člověk při směně potřeboval spočítat kusy dobytka, svitky plátna a později kovové mince. Přirozená čísla tuto potřebu splňovala nejlépe. Vyjadřuje se jimi počet prvků konečné množiny (počet mamutů, denárů, akcií) i pořadí odpočítávaných objektů. V matematické literatuře není pojem množina přirozených čísel chápán jednotně. Někteří autoři zařazují do množiny přirozených čísel i nulu. V dalším budeme pod množinou přirozených čísel rozumět jen množinu čísel $1, 2, 3, \dots$; budeme ji značit $\mathbb{N}$.

Na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ jsou zavedeny operace sčítání, označení „+“, a násobení, označení „ $\cdot$ “. Píšeme např. $2+3=5$, $2\cdot 3=6$. Jestliže $a, b \in \mathbb{N}$ a existuje takové číslo $c \in \mathbb{N}$, že $a = b+c$, označíme $c = a-b$. Je tedy mezi některými prvky z $\mathbb{N}$ definována operace „-“, nazveme ji odečítáním. Požadavek proveditelnosti této operace pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ vede k zavedení 0 a celých záporných čísel $-1, -2, -3, \dots$. Např. $45 - 45 = 0$, $2 - 28 = -26$. Ani nás nepřekvapí, že zavedení celých čísel souvisí s hospodařením a s podnikáním. Jakmile začali lidé obchodovat, začali dělat také dluhy – třeba proto, že kožešinu někdo potřeboval okamžitě, ale jelena, jehož masem chtěl zaplatit, ještě uloveného neměl. Čísla přirozená pak byla logicky doplněna čísly zápornými.

Celá čísla. Množina $\mathbb{N}$ sjednocená s množinou $\{0\}$ a s množinou celých záporných čísel se značí $\mathbb{Z}$ a nazývá *množinou celých čísel*. Symbolem $\mathbb{Z}^+(\mathbb{Z}^-)$ budeme značit množinu celých