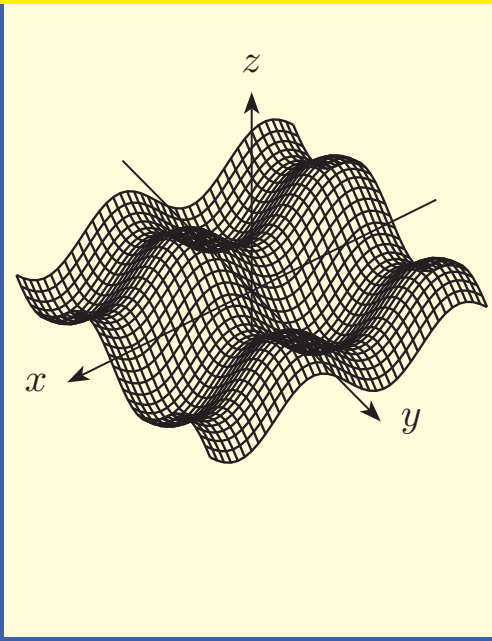
Zuzana Došlá, Petr Liška

Matematika
pro nematematické obory



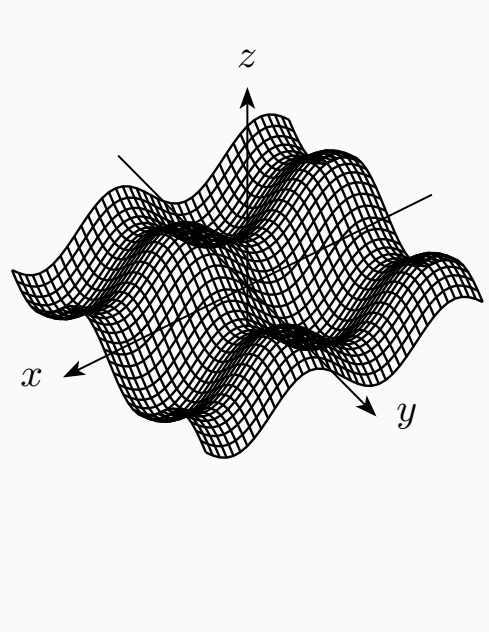
s aplikacemi v přírodních a technických vědách

GRADA®

Zuzana Došlá, Petr Liška

Matematika

pro nematematické obory



s aplikacemi v přírodních a technických vědách

Grada Publishing

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy
Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude ***trestně stíháno****.*

prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.
Mgr. Petr Liška

Matematika pro nematematické obory
s aplikacemi v přírodních a technických vědách

Tiráž tištěné publikace:
Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 5655. publikaci

Odborná recenze:
doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi
Grafická úprava a sazba Mgr. Petr Liška
Počet stran 304
První vydání, Praha 2014
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

© Grada Publishing, a.s., 2014
Cover Illustration © Mgr. Petr Liška

ISBN 978-80-247-5322-5

Elektronické publikace:
ISBN 978-80-247-9206-4 (ve formátu PDF)

Obsah

Předmluva **9**

1 Lineární algebra **11**
1.1 Systémy lineárních rovnic a matice 11
1.2 Hodnost matice 16
1.3 Gaussova eliminační metoda 21
1.4 Determinant matice 25
1.5 Vlastní čísla a vlastní vektory 28
Cvičení 29

2 Funkce jedné proměnné **31**
2.1 Pojem funkce 31
2.2 Polynomy 37
2.3 Racionální lomené funkce 41
2.4 Goniometrické a cyklometrické funkce 47
Cvičení 51

3 Limita, derivace a průběh funkce **53**
3.1 Limita funkce 54
3.2 Spojitost funkce 59
3.3 Derivace funkce 60
3.4 Extrémy funkce 66
3.5 L'Hospitalovo pravidlo 75
3.6 Konvexnost a konkávnost funkce 78
3.7 Asymptoty funkce 79
3.8 Průběh funkce 81
Cvičení 92

4 Neurčitý integrál **97**
4.1 Primitivní funkce 97
4.2 Základní integrační metody 102
4.3 Integrace racionální lomené funkce 106

4.4 Speciální integrační metody 110
Cvičení 115

5 Určitý integrál 117
5.1 Definice a základní vlastnosti určitého integrálu 117
5.2 Metoda per partes a substituce pro určité integrály 122
5.3 Geometrické aplikace určitého integrálu 123
5.4 Nevlastní integrály 128
Cvičení 134

6 Aproximace a interpolace 135
6.1 Diferenciál funkce 135
6.2 Lagrangeův polynom 138
6.3 Metoda nejmenších čtverců 141
Cvičení 142

7 Nekonečné řady 143
7.1 Posloupnosti 143
7.2 Číselné řady 144
7.3 Kritéria konvergence 147
7.4 Pravidla pro počítání s číselnými řadami 151
7.5 Mocninné řady 153
7.6 Fourierovy řady 159
7.7 Některé aplikace nekonečných řad 164
Cvičení 166

8 Diferenciální rovnice prvního řádu 167
8.1 Co jsou diferenciální rovnice 167
8.2 Rovnice se separovanými proměnnými 170
8.3 Lineární diferenciální rovnice 173
8.4 Numerické řešení počáteční úlohy 179
8.5 Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu 181
Cvičení 187

9 Diferenciální rovnice druhého řádu 189
9.1 Homogenní rovnice 190
9.2 Nehomogenní rovnice 195
9.3 Okrajová úloha 201
Cvičení 201

10 Funkce více proměnných 203
10.1 Funkce a její definiční obor a graf 203
10.2 Limita funkce 209

10.3 Spojitost funkce . . . 210
10.4 Vektorové funkce . . . 212
Cvičení . . . 214

11 Parciální derivace a extrémy . . . 215
11.1 Parciální derivace . . . 215
11.2 Gradient, divergence a rotace . . . 219
11.3 Diferenciál funkce . . . 223
11.4 Kmenová funkce . . . 225
11.5 Lokální extrémy . . . 226
11.6 Absolutní extrémy . . . 231
Cvičení . . . 235

12 Dvojný a trojný integrál . . . 239
12.1 Co je dvojný integrál . . . 239
12.2 Fubiniho věta pro dvojný integrál . . . 242
12.3 Transformace dvojného integrálu . . . 247
12.4 Aplikace dvojného integrálu . . . 251
12.5 Fubiniho věta pro trojný integrál . . . 255
12.6 Transformace trojného integrálu . . . 259
Cvičení . . . 265

13 Křivkový integrál . . . 267
13.1 Parametrické rovnice křivek . . . 267
13.2 Křivkový integrál prvního druhu . . . 270
13.3 Křivkový integrál druhého druhu . . . 272
13.4 Nezávislost integrálu na integrační cestě . . . 275
13.5 Greenova věta . . . 278
Cvičení . . . 279

14 Autonomní systémy v rovině . . . 281
14.1 Základní pojmy . . . 281
14.2 Lineární autonomní systémy v rovině . . . 283
Cvičení . . . 290

Výsledky . . . 291

Rejstřík . . . 299

Literatura . . . 303

Summary . . . 304

O autorech

prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Vystudovala obor Matematika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně (dříve Univerzita J. E. Purkyně), kde také od roku 1981 působí jako vysokoškolský pedagog. Od roku 2005 je profesorkou matematiky v oboru Matematika – Matematická analýza. Ve své vědecko-výzkumné činnosti se zaměřuje na studium kvalitativních vlastností obyčejných diferenciálních a diferenčních rovnic. Je autorkou více než stovky odborných vědeckých prací, jedné zahraniční monografie, několika skript a multimediálních textů. Navázala bohatou mezinárodní spolupráci, zejména s italskými matematiky, a své výsledky publikuje v mezinárodních vědeckých časopisech. Jako pedagog se zaměřuje na výuku matematické analýzy pro učitelské studium a výuku matematiky pro nematematické obory. Dlouhodobě se podílí na popularizaci matematiky a přírodních věd. Je školitelkou doktorandů a členkou redakčních rad několika mezinárodních časopisů.

Mgr. Petr Liška

Je absolventem oboru Učitelství matematiky a deskriptivní geometrie pro střední školy na Masarykově univerzitě v Brně, kde v současnosti pokračuje v doktorském studiu Matematické analýzy a věnuje se kvalitativním vlastnostem obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním. Vyučuje matematiku pro chemiky a základy matematiky. Od roku 2010 působí jako asistent na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty Mendelovy univerzity v Brně, kde vyučuje základní kurzy matematiky a konstruktivní geometrie.

Předmluva

Žádné lidské zkoumání nemůže být nazváno opravdovou vědou,
pokud ho nemůžeme dokázat matematicky.
Leonardo da Vinci

Tato učebnice obsahuje základy matematiky v rozsahu, který je obvykle probírán v prvních dvou semestrech bakalářského studia nematematických oborů. Jde o základy lineární algebry, diferenciální a integrální počet funkcí jedné a více proměnných, nekonečné řady, diferenciální rovnice, křivkový integrál a autonomní systémy.

Matematika bývá označována za královnu věd. Vyznačuje se nezpochybnitelností výsledků a nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti, její krása spočívá v logické výstavbě.

Při psaní této učebnice jsme si kladli následující otázky: *Může být matematika stejně krásná jako hudba? Jak ukázat matematiku v tomto světle studentům, jejichž specializací matematika není?*

Cílem učebnice není naučit čtenáře jen derivovat a integrovat, ale vést jej také k analytickému myšlení, schopnosti definovat pojmy a formulovat problémy a tvrzení. Přitom jsme hledali vhodný poměr mezi matematickou přesností a srozumitelností tak, aby byla přístupná širokému okruhu čtenářů. V neposlední řadě jsme chtěli ukázat, že matematika nás obklopuje i v každodenním životě.

V každé kapitole je nejprve uveden matematický aparát, kdy formou definic zavedeme nové pojmy a formou matematických vět popíšeme vztahy mezi nimi. Každá matematická věta má předpoklady, za kterých dané tvrzení platí. Změníme-li předpoklady, tvrzení nemusí zůstat v platnosti, na což se občas v aplikacích zapomíná. Každou matematickou větu lze zcela exaktně dokázat, avšak důkazy vzhledem k rozsahu a zaměření textu nejsou uvedeny. Pochopení matematických pojmů a algoritmů je ilustrováno na velkém počtu řešených příkladů, následně jsou předvedeny aplikace v konkrétních úlohách s přírodovědnou a technickou tematikou.

Další zajímavé aplikace matematiky najdeme v medicíně, ekonomii, v humanitních a společenských vědách. Tyto aplikace jsme pro nedostatek místa nemohli zařadit, viz např. [2], [11], [17] nebo [21].

Závěrem bychom chtěli popřát všem studentům a čtenářům, aby se pro ně matematika stala zajímavou a inspirativní součástí jejich vědního oboru.

Brno, červenec 2014 Autoři

®

Kapitola 1

Lineární algebra

Obecně se dá říci, že lineární algebra je část matematiky, která se věnuje vektorovým prostorům a lineárním transformacím těchto prostorů. Jedná se ovšem o vysoce abstraktní pojmy a pokud bychom je chtěli poctivě zavést a studovat do všech detailů, museli bychom lineární algebře věnovat celou knihu. V této kapitole se tedy zaměříme jen na nejdůležitější objekty a metody, se kterými lineární algebra pracuje.

Jednou ze základních úloh lineární algebry je řešení *systémů lineárních rovnic*. K těmto systémům vede mnoho úloh z praxe (modelování v ekonomii, vyvažování chemických reakcí, popisy toků v sítích atd.) a navíc jsou užitečným nástrojem i v jiných odvětvích matematiky. Naučíme se tedy jednu z metod, jak takové systémy řešit – tzv. Gaussovu eliminační metodu. K tomuto účelu zavedeme základní pojmy lineární algebry: *matice a hodnost matice*. Dále se seznámíme s pojmem *determinant matice*, který budeme potřebovat v dalších kapitolách, a zavedeme tzv. *vlastní čísla*, jež později použijeme při řešení tzv. dynamických systémů.

1.1 Systémy lineárních rovnic a matice

Již na střední škole se řeší systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

pro neznámé x, y, kde a, b, c, d, e, f jsou nějaká daná reálná čísla. Tento systém se dá řešit například sčítací metodou, tj. postupem, kdy jednu rovnici vynásobíme vhodným číslem a sečteme s druhou rovnicí tak, abychom vyloučili jednu neznámou.

Tento systém můžeme interpretovat i geometricky. Každá rovnice představuje přímku v rovině a najít řešení znamená určit jejich průsečík. Dvě přímky

mohou mít buď jeden průsečík (pak má systém jedno řešení), nebo splývají (systém má nekonečně mnoho řešení), nebo nemají žádný průsečík, tj. přímky jsou rovnoběžné (systém nemá žádné řešení).

Příklad 1.1. a) Systém dvou rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

má právě jedno řešení, kterým je $x = 1$, $y = 1$.

b) Systém

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

má nekonečně mnoho řešení. Není možné si ovšem představit, že když má tento systém nekonečně mnoho řešení, pak libovolná dvojice čísel je řešením systému. Těchto nekonečně mnoho řešení je například ve tvaru $(t, -t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

c) Naopak systém

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \tag{1.3}$$

nemá žádné řešení. □

Podobné příklady bychom mohli uvést pro systémy více lineárních rovnic o více proměnných, přičemž naše představivost by byla limitována rovnicemi o třech neznámých, které by zastupovaly roviny v prostoru. Obecně můžeme uvažovat o libovolném počtu rovnic a neznámých, přitom se počet rovnic nemusí rovnat počtu neznámých.

Definice 1.2. *Systémem k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$* rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takovýto systém *homogenní.*

Řešením systému (1.4) je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Obecně (tj. nezávisle na počtu lineárních rovnic a počtu neznámých) jsou možné tři případy.

1. Systém rovnic má *právě jedno řešení.*
2. Systém rovnic má *nekonečně mnoho řešení.*
3. Systém rovnic nemá *žádné řešení.*

Základní otázkou tedy je, jak poznáme, který z těchto případů nastane? Odpověď úzce souvisí s pojmy matice a hodnost matice.

Definice 1.3. *Matice* je tabulka čísel. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, označujeme ji

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Říkáme, že A je matice typu $m \times n$, čísla a_{ij} nazýváme *prvky matice.* Matici typu $n \times 1$ nazýváme sloupcový vektor a matici typu $1 \times n$ řádkový vektor, stručně *vektor*.

Prvky matice mohou být i některé jiné matematické objekty, např. funkce. S takovými maticemi se setkáme v kapitolách o diferenciálních rovnicích a vícerozměrných integrálech.

Systém rovnic (1.4) můžeme reprezentovat následujícími maticemi a ty pak studovat místo něj.

Maticí systému (1.4) nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí systému (1.4) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Ještě než se ovšem dostaneme ke studiu našeho systému, seznámíme se s maticemi podrobněji.

Řekneme, že dvě matice A, B téhož typu $m \times n$ jsou si *rovny*, jestliže jsou si rovny všechny sobě odpovídající prvky těchto matic, tj.

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pro všechny indexy } i, j.$$

Je-li $m = n$, nazýváme matici A *čtvercovou maticí* a číslo n *řádem* této matice A. Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A. Čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a jinde má všechny prvky nulové, se nazývá *jednotková matice* a označujeme ji E. Jsou-li všechny prvky a_{ij} rovny nule, pak se A nazývá *nulová matice*.

S maticemi můžeme provádět následující operace.

Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Tedy

$$C = k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Prvek c_{ij} tedy vznikne tak, že vezmeme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B, vynásobíme sobě odpovídající prvky a vše sečteme.

Poznámka 1.4. i) Sčítat lze pouze matice stejného typu. Pro matice různého typu není součet definován.

ii) Operace násobení je definována pouze pro případ „$m \times n$ krát $n \times p$“. Z toho také vyplývá, že obecně neplatí rovnost $AB = BA$. Součin BA totiž vůbec nemusí být definován, přestože součin AB provést lze, viz Příklad 1.5. Nicméně i v případě, kdy lze násobit BA, rovnost $AB = BA$ obecně neplatí.

Příklad 1.5. Proveďte následující operace:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. a) Součet matic je definován pouze pro matice stejného typu, přičemž pak sčítáme odpovídající prvky obou matic. V našem případě dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 \\ -3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Připomeňme, že součin dvou matic je definován pouze v případě, že první z nich má tolik sloupců, kolik řádků má druhá. V našem případě je součin definován a platí:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 3\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 3 & 5\cdot 3 + 4\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 5\cdot 2 + 4\cdot 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 15 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

□

Maticemi nemusíme jen reprezentovat koeficienty lineárních rovnic, můžeme jimi celé systémy rovnou zapisovat, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.6. Systém rovnic (1.1) lze maticově zapsat pomocí matice typu 2×2, sloupcového vektoru, jehož prvky jsou neznámé x, y, a sloupcového vektoru, jehož prvky jsou čísla $2, 0$ z pravé strany rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobně systémy rovnic (1.2) a (1.3) jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Systém (1.4) lze psát v maticovém tvaru

$$A \cdot X = B, \qquad \text{kde} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

□

1.2 Hodnost matice

Vraťme se nyní k otázce, který z možných případů při řešení lineárního systému rovnic nastane, tj. jak můžeme snadno rozlišit, kdy má systém právě jedno řešení, kdy nekonečně mnoho řešení a kdy žádné? Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, musíme zavést pojem *hodnost matice*.

Připomeňme, že *vektor* je uspořádaná n-tice čísel nebo též matice typu $1 \times n$. Součin čísla s vektorem se provádí po složkách, tj. stejně, jako by se prováděl součin čísla s maticí typu $1 \times n$. Podobně je součet dvou vektorů totéž jako součet dvou matic typu $1 \times n$. Nulovým vektorem $\mathbf{o}$ rozumíme vektor složený se samých nul, tj. $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definice 1.7. Řekneme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}$$

plyne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. V opačném případě, tj. když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}\,,$$

říkáme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně závislé*.

Například vektory $\mathbf{u_1} = (1, 2)$ a $\mathbf{u_2} = (0, 3)$ jsou lineárně nezávislé. Vytvoříme-li totiž lineární kombinaci těchto vektorů

$$\alpha \cdot (1, 2) + \beta \cdot (0, 3) = (\alpha, 2\alpha) + (0, 3\beta) = (\alpha, 2\alpha + 3\beta)\,,$$

dostaneme vektor, který položíme roven nulovému vektoru, tj.

$$(\alpha, 2\alpha + 3\beta) = (0, 0)\,.$$

Odtud plyne, že $\alpha = 0$, $2\alpha + 3\beta = 0$, a proto také $\beta = 0$.

Naopak vektory $\mathbf{u_1} = (1, 2)$ a $\mathbf{u_2} = (2, 4)$ jsou lineárně závislé, protože například platí, že

$$2 \cdot (1, 2) - 1 \cdot (2, 4) = (0, 0)\,.$$

Nyní uvažujme matici A. Řádky matice můžeme chápat jako vektory a lineární nezávislost řádků matice pak znamená lineární nezávislost vektorů. Pomocí tohoto pojmu definujeme hodnost matice.

Definice 1.8. *Hodnost matice A* je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární*.

Jak určíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice? Je zřejmé, že v nulové matici neexistuje žádný lineárně nezávislý řádek. Hodnost nulové matice je tedy rovna nule. V dalším proto uvažujme pouze nenulové matice, tj. předpokládejme, že je aspoň jeden prvek této matice nenulový. U matice 2×2 snadno poznáme, že jsou její řádky lineárně závislé. Nenulová matice A typu 2×2 má hodnost jedna, pokud je druhý řádek násobkem prvního řádku, tj. matice je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix},$$

kde k je nějaké reálné číslo. V opačném případě má matice A hodnost dva.

Příklad 1.9. V příkladě 1.6 jsme viděli, že levé strany systémů (1.2) a (1.3) lze maticově zapsat pomocí stejné matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je rovna jedné (lineární závislost řádků je zřejmá). Naproti tomu levé strany systému (1.1) jsme zapsali pomocí matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je rovna dvěma (druhý řádek není násobkem prvního řádku). □

Zkoumání hodnosti matice vyššího typu než 2×2 je již trochu složitější. K vyšetřování lineární závislosti, resp. nezávislosti řádků matice využijeme následující věty.

Věta 1.10. *Hodnost matice se nezmění, jestliže:*

1. *zaměníme pořadí řádků,*
2. *vynásobíme libovolný řádek nenulovým číslem,*
3. *přičteme k danému řádku (nebo odečteme od daného řádku) libovolný násobek jiného řádku.*

Úpravy z předchozí věty souhrnně nazýváme *elementární řádkové úpravy.* Pomocí těchto úprav převedeme matici na tzv. schodovitý tvar, ze kterého již snadno určíme hodnost matice.

Definice 1.11. Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Je-li nenulová matice A ve schodovitém tvaru, pak svým tvarem skutečně odpovídá tomuto názvu, neboť nuly v matici A tvoří jakési „schody“. Přitom první řádek může (ale nemusí) začínat nulou (resp. nulami), druhý řádek však již musí začínat alespoň jednou nulou, třetí řádek musí začínat alespoň dvěma nulami atd.

Příklad 1.12. Následující matice jsou ve schodovitém tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Věta 1.13. *Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.*

Věta 1.14. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Příklad 1.15. Uvažujme matice z příkladu 1.12. Jejich hodnost je

$$h(A) = 3, \quad h(B) = 1, \quad h(C) = 2.$$

□

Algoritmus (postup) převodu matice na schodovitý tvar je následující:

1. V prvním kroku převedeme matici do tvaru, kdy má na pozici $(1, 1)$ (první řádek a první sloupec) nenulový prvek a_{11} a ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

kde na pozici $\star$ stojí nějaké prvky (mohou být nenulové i nulové). Je-li $a_{11} \neq 0$, dosáhneme tohoto tvaru například tak, že první řádek opíšeme, a ke druhému řádku přičteme vhodný násobek prvního řádku tak, aby na pozici $(2,1)$ vznikla nula. Podobně postupujeme s ostatními řádky.

2. V druhém kroku chceme „vytvořit“ nuly ve druhém sloupci pod prvkem $\boxed{\star}$. Usilujeme tedy o tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

První dva řádky opíšeme a poté postupujeme obdobně jako v prvním kroku: od třetího řádku odečteme vhodný násobek druhého řádku, totéž pro čtvrtý řádek atd.

3. Postupnými úpravami převedeme matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků této matice je roven hodnosti zadané matice.

Uvedený algoritmus je názorně ilustrován v následujícím příkladě.

Příklad 1.16. Určete hodnost matice:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a) Připomeňme, že v prvním kroku se snažíme získat pod prvkem na pozici $(1,1)$ samé nuly. První řádek proto opíšeme. Od druhého řádku odečteme trojnásobek prvního řádku a od třetího řádku odečteme pětinásobek prvního řádku. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

V druhém kroku usilujeme o samé nuly pod prvkem na pozici $(2,2)$. Opíšeme proto první dva řádky a od čtyřnásobku třetího odečteme šestinásobek druhého řádku, dostáváme tak matici ve schodovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & -6 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků je tři, a proto i hodnost dané matice je tři.

b) Postupujeme analogicky jako v předchozím případě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků výsledné schodovité matice je dva, a proto je i hodnost zkoumané matice rovna dvěma. □

Nyní si konečně ukážeme, jak ze znalosti hodnosti matice systému a hodnosti rozšířené matice systému určíme počet řešení systému (1.4) (tj. zda má systém jediné řešení, nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné řešení).

Podmínku, kdy má systém (1.4) řešení, udává následující věta.

Věta 1.17 (Frobeniova věta)**.** *Systém lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému.*

V případě, jsou-li si hodnosti obou matic rovny, zbývá ještě zjistit, zda má systém pouze jedno, nebo nekonečně mnoho řešení. O tom rozhodneme na základě následujících dvou vět.

Věta 1.18. *Systém k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice systému rovna hodnosti rozšířené matice systému a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.*

Z této věty plyne, že jediné řešení může mít pouze systém, kde $k \geq n$. Je-li totiž $k < n$, pak $h(A) \leq k < n$ (počet lineárně nezávislých řádků je zřejmě menší nebo roven počtu všech řádků) a situace popsaná ve větě 1.18 nemůže nastat. Slovy řečeno, jediné řešení může mít pouze systém, ve kterém je alespoň tolik rovnic, kolik neznámých.

Věta 1.19. *Systém k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice systému rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.*

Homogenní systém rovnic (tj. na pravé straně systému jsou samé nuly) má vždy alespoň jedno řešení, a to tzv. *triviální* řešení $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Aby měl homogenní systém netriviální řešení (a tedy nekonečně mnoho řešení), musí podle věty 1.19 platit $h < n$.

Příklad 1.20. Uvažujme systémy z příkladu 1.1.

a) Rozšířená matice systému (1.1) je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je stejná jako hodnost matice systému, a to dvě, což je zároveň také počet neznámých. To odpovídá situaci popsané ve větě 1.18 a podle ní tedy má systém (1.1) právě jedno řešení.

b) Rozšířená matice systému (1.2) je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je stejná jako hodnost matice systému, a to jedna, což je číslo menší než počet neznámých. To odpovídá situaci popsané ve větě 1.19, a proto má systém (1.2) nekonečně mnoho řešení.

c) Rozšířená matice systému (1.3) je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Hodnost této rozšířené matice je dvě, ale hodnost matice systému je jedna. V tomto případě nemá podle Frobeniovy věty 1.17 systém (1.3) žádné řešení. □

1.3 Gaussova eliminační metoda

Již známe odpověď na otázku, kolik řešení má systém lineárních rovnic. Zbývá tedy nalézt řešení takovéhoto systému. Základní metodou řešení systému lineárních rovnic je tzv. *Gaussova eliminační metoda*.

Tato metoda je založena na tom, že řešení systému se nezmění, jestliže:

1. zaměníme pořadí rovnic,
2. vynásobíme libovolnou rovnici nenulovým číslem,
3. přičteme k dané rovnici libovolný násobek jiné rovnice.

Jde o stejné úpravy, které nezmění hodnost matice (věta 1.10). Proto při této metodě nepracujeme s danými rovnicemi, ale pouze s rozšířenou maticí systému.

Tuto matici převedeme na schodovitý tvar (viz podkapitola 1.2). Potom postupně vypočteme jednotlivé neznámé tak, že začneme posledním řádkem schodovité matice a postupujeme až k prvnímu řádku. Celý tento postup je názorně předveden v následujících příkladech.

Příklad 1.21. Řešte systém lineárních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \\ 5x + 5y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Řešení. a) Rozšířená matice systému je tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

První řádek ponecháme beze změny, k druhému přičteme první a od třetího odečteme dvojnásobek prvního. Dostaneme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Nyní opíšeme první i druhý řádek a od třetího odečteme trojnásobek druhého. Získáme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední řádek odpovídá rovnici $-6z = 0$, a proto $z = 0$. Po dosazení $z = 0$ do druhého rovnosti $y + 3z = 1$ dostaneme $y = 1$. Nakonec do prvního řádku dosadíme za y i z a vypočítáme $x = 3$. Systém má tedy jedno řešení $(x, y, z) = (3, 1, 0)$.

b) Napíšeme rozšířenou matici systému

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a obdobně jako v předchozím případě ji převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice systému je rovna hodnosti rozšířené matice systému, ale je menší než počet neznámých ($h = 3$, $n = 4$). Podle věty 1.19 platí, že takový systém má nekonečně mnoho řešení a je možné volit $4 - 3 = 1$ neznámou (dostaneme tzv. volnou neznámou neboli *parametr*). Z posledního řádku dostáváme $6x_4 = -3$, proto $x_4 = -\frac{1}{2}$. Druhý řádek dává rovnost $-5x_2 + x_4 = -8$ a po dosazení za $x_4 = -\frac{1}{2}$ dostáváme $x_2 = \frac{3}{2}$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do prvního řádku a dostaneme $x_1 - x_3 = 1$. Této rovnosti zřejmě vyhovuje nekonečně mnoho hodnot x_1, x_3. Zvolme např. x_3 za volnou neznámou, tj. nechť $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Zkoumaný systém rovnic má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2},$$

kde t je libovolné reálné číslo (parametr).

c) Stejně jako v předchozích případech převedeme rozšířenou matici systému na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Opět dostáváme, že počet neznámých je větší než hodnost daného systému ($h = 2, n = 4$), a proto má systém nekonečně mnoho řešení. Volné neznámé jsou dvě, ovšem nemůžeme je volit úplně libovolně, jelikož z poslední rovnice plyne, že $x_4 = -1$. Pak již na volbě nezáleží a zvolíme-li například $x_3 = s$ a $x_2 = t$, dostaneme dosazením do první rovnice, že $x_1 = 1 + t - s$. Řešením systému je tak čtveřice

$$x_1 = 1 + t - s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = -1,$$

kde s, t jsou libovolná čísla.

d) Postupujme podobně jako v předchozích případech:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Z posledního řádku plyne, že daný systém nemá řešení, protože rovnici

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \ = 7$$

nelze splnit. Tvar matice také ukazuje, že hodnost matice systému je rovna dvěma, ale hodnost rozšířené matice systému je rovna třem. Podle Frobeniovy věty (věta 1.17) tento systém nemá žádné řešení. □

Ukažme si nyní pár příkladů, kde se můžeme setkat se systémy lineárních rovnic v praxi.

Aplikace 1.22 (Vyvažování chemických rovnic)**.** Chemické rovnice popisují množství látek, které se v průběhu chemické reakce spotřebují a vytvoří. Například při hoření propanu se propan (C_3H_8) spojuje s kyslíkem (O_2) a vytváří oxid uhličitý (CO_2) a vodu (H_2O) podle rovnice

$$x_1\, C_3H_8 + x_2\, O_2 \longrightarrow x_3\, CO_2 + x_4\, H_2O\,.$$

Vyvažovat takovouto rovnici znamená nalézt celá čísla $x_1, \ldots, x_4$ tak, aby počet atomů jednotlivých prvků na jedné straně rovnice odpovídal počtu atomů na druhé straně. Systematické řešení tohoto problému vede k systému lineárních rovnic. V našem konkrétním případě máme tři rovnice (každou pro jeden zastoupený prvek v pořadí C, H, O) o čtyřech neznámých (jedna za každou sloučeninu v reakci):

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Převedeme-li vektory u neznámých na pravé straně, dostaneme homogenní systém lineárních rovnic. Vyřešíme ji Gaussovou eliminační metodou a dostaneme řešení

$$x_1 = \frac{1}{4}t, \quad x_2 = \frac{5}{4}t, \quad x_3 = \frac{3}{4}t, \quad x_4 = t\,.$$

Jelikož chceme, aby bylo řešení celočíselné, zvolíme např. $t = 4$ (nejmenší vhodná volba) a dostaneme tak rovnici

$$C_3H_8 + 5\, O_2 \longrightarrow 3\, CO_2 + 4\, H_2O\,.$$

□

Aplikace 1.23 (Správná dieta)**.** V posledních letech nastal velký boom zájmu o zdravý životní styl a v souvislosti s ním i o správné stravování a různé diety. Základem je vždy najít správný poměr živin, vitamínů a minerálů, které člověk potřebuje. Problémem je, že každá potravina obsahuje různé množství užitečných látek. Celkem se takto sleduje na desítky položek. Pro jednoduchost si můžeme situaci ilustrovat na některých vitamínech a zelenině.

Doporučené množství	
Vitamín	Denní dávka
B_2	1,4 mg
C	80 mg
K	0,075 mg

Množství vitamínů v porci zeleniny			
Zelenina	B_2	C	K
Mrkev	0,059 mg	1,5 mg	0 mg
Špenát	0,236 mg	9,8 mg	0,145 mg
Rajče	0,148 mg	19,1 mg	0 mg

Pokud tedy chceme získat vitamíny B_2, C a K konzumací mrkve, špenátu a rajčete, dostáváme následující systém rovnic, kde každá rovnice zastupuje jeden vitamín a neznámé hrají roli počtu porcí jednotlivých druhů zeleniny:

$$\begin{aligned} 0{,}059m + 0{,}236s + 0{,}148r &= 1{,}4 \\ 1{,}5m + 9{,}8s + 19{,}1r &= 0 \\ 0{,}145s &= 0{,}075 \end{aligned}$$

Řešení tohoto systému je $m \approx 14{,}7$, $r \approx 2{,}8$, $s \approx 0{,}5$. Tedy abychom získali vitamíny B_2, C a K, museli bychom sníst skoro patnáct porcí mrkve, tři porce rajčete a půl porce špenátu. Poznamenejme, že jsme měli docela štěstí, jelikož nás zajímají pouze kladná řešení rovnice, ale ta nemáme zaručena. Není tedy jednoduché jídelníček správně složit z dostupných potravin. □

1.4 Determinant matice

Důležitou charakteristikou čtvercové matice je determinant, číslo utvořené z jejích prvků. Pro typickou obecnou definici determinantu bychom potřebovali mnoho nových pojmů, uvedeme tedy tzv. rekurzivní definici.

Definice 1.24. *Determinant* $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 1×1 je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}\,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Speciálně pro determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 2×2 dostáváme tzv. *křížové pravidlo*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 3×3 můžeme použít tzv. *Sarrusovo pravidlo*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Podle předchozího tak můžeme snadno spočítat determinant matice 2×2:

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 8 \cdot (-6) = 62,$$

a 3×3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 3\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = \\ = 2 + 2 + 6 + 3 - 8 + 1 = 6.$$

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} |A_{lk}|, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \le l \le n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme matici rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat. Praktický výpočet determinantu matice si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 1.25. Vypočtěte determinant:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Řešení. a) Jedná se o determinant čtvrtého řádu, použijeme rozvoj podle prvního sloupce. Algoritmus výpočtu je vidět z postupu, exponent členu (-1) je roven součtu řádkového a sloupcového indexu, které odpovídají pozici daného čísla.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6) = -12.$$

b) V tomto případě použijeme rozvoj podle prvního řádku a dostáváme

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) + 3\cdot(-3) = -5.$$

□

Předchozí postup je poměrně jednoduchý, ale je nutné si uvědomit, že pro opravdu velké matice (které by neobsahovaly řádek nebo sloupec s mnoha nulami) je nepoužitelný. Například i jen pro matici 25×25 by vyžadoval výpočet přibližně $1{,}5\times 10^{25}$ součinů, což by i počítači trvalo několik tisíc let. V podobných případech je matici potřeba upravit tak, aby obsahovala co nejvíce nul. Toho lze dosáhnout pomocí pravidel pro počítání s determinanty.

1. Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant výsledné matice bude k-násobkem determinantu matice původní.
2. Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.
3. Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.
4. Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.

Vztah mezi determinantem a hodností matice udává následující věta.

Věta 1.26. *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Hodnost matice $h(A) = n$ právě tehdy, když $|A| \neq 0$.*

Připomeňme, že čtvercovou matici A řádu n nazýváme regulární, je-li $h(A) = n$. Předchozí věta nám tedy říká, že matice A je regulární právě tehdy, když je její determinant nenulový.

1.5 Vlastní čísla a vlastní vektory

Myšlenka vlastních čísel a vlastních hodnot se objevuje na různých místech v matematice a v jejích aplikacích. Oba tyto pojmy si definujeme a naučíme se nalézt vlastní čísla matice. Jednu z mnoha aplikací vlastních čísel ukážeme později v kapitole věnované dynamickým systémům.

Definice 1.27. Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\mathbf{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1.5}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\mathbf{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Zamyslíme-li se nad geometrickou interpretací, pak vlastní vektor je takový vektor, který se po vynásobení matice pouze „natáhne“ nebo „zkrátí“, ale nemění svůj směr.

Z předchozí definice se dá i snadno vyvodit, jak vlastní čísla matice A nalézt. Přepíšeme-li rovnici (1.5), dostaneme

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda E)\mathbf{x} = 0.$$

Máme tak vlastně homogenní systém lineárních rovnic, u kterého požadujeme, aby měl jiné než triviální řešení. To znamená, že matice $A - \lambda E$ musí mít hodnost menší než n. Jinými slovy tato matice není regulární a pro její determinant musí platit

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{1.6}$$

Rovnice (1.6) se nazývá *charakteristická rovnice matice* A.

Příklad 1.28. Určete vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice $A - \lambda E$ je tvaru

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou tak řešení rovnice

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant na levé straně vypočítáme podle Sarrusova pravidla a dostaneme tak rovnici

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Vlastní čísla pak jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$. □

Cvičení

1. Gaussovou metodou řešte systém lineárních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} 3a + 3b + 2c + d &= 10 \\ 4a + 2b + 3c + d &= 8 \\ 3a + 5b + c + d &= 15 \\ 7a + 4b + 5c + 2d &= 18 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a + 5b + 4c + 3d + 2e &= 3 \\ 2a + b + 2c + 3d + 4e &= 6 \\ 2b + 3c + d &= 0 \\ 3a + 4b + 5c + d + 6e &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x - 9y + 5z &= 1 \\ 2x + 3y + 3z &= 2 \\ x + 8y &= 1 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} b + c &= 0 \\ 2a + b - c &= 1 \\ a + b - c + d &= 2 \\ a + 2b &= -1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} a + b - 2c + d &= -5 \\ 2a + 2b - c - d &= 2 \\ 3a + b + c + d &= 8 \\ a - b + c - d &= 6 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 1 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 5x - 9y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 2x - 4y - z &= 0 \\ 4x - 6y - 3z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 0 \\ 3x - 2y - z &= 0 \\ 4x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 2a - 3b + c + 2d &= 0 \\ 3a + b - 2c - d &= 6 \\ 4a - 2b - 3c - 4d &= -6 \\ a + 2b + 3c - 2d &= -7 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ -a - b + 2d &= 0 \\ 2a + b + c - d &= 0 \\ a + 3c + 3d &= 0 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 4x + 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

2. Vypočtěte determinant matice:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. Určete vlastní čísla matice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$