

Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání



- Lineární algebra
- Diferenciální a integrální počet
- Diferenciální rovnice
- Diferenční rovnice
- Teorie a 237 řešených příkladů



Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání



Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude trestně stíháno.

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.

RNDr. Petr Rádí

Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.

U Průhonu 22, 170 00 Praha 7

tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400

www.grada.cz

jako svou 5961. publikaci

Odborná recenze:

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce
nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědní redaktoři Petr Somogyi, Kamila Nováková

Sazba Petr Somogyi

Návrh a zpracování obálky Jan Dvořák

Počet stran 272

Druhé vydání, Praha 2015

Vytiskla Tiskárna v Ráji, s.r.o., Pardubice

© Grada Publishing, a.s., 2015

Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-9914-8 (pdf)

ISBN 978-80-247-5406-2 (print)

Obsah

O autorech.....	9
Úvod.....	11
1. Lineární algebra.....	13
1.1 Základní pojmy z teorie množin	14
Cvičení	16
1.2 Vektorové prostory	16
1.2.1 Pojem vektorového prostoru	16
1.2.2 Aritmetický vektorový prostor	18
1.2.3 Podprostor vektorového prostoru.....	19
1.2.4 Lineární závislost a nezávislost vektorů.....	21
1.2.5 Báze a dimenze vektorového prostoru	22
Cvičení	24
1.3 Matice.....	26
1.3.1 Pojem matice	26
1.3.2 Základní operace s maticemi	29
1.3.3 Hodnota matice	31
1.3.4 Násobení matic	35
Cvičení	38
1.4 Determinanty	39
1.4.1 Pojem determinantu	39
1.4.2 Vlastnosti determinantů.....	42
1.4.3 Kondenzační metoda výpočtu determinantů.....	47
Cvičení	48
1.5 Soustavy lineárních rovnic	50
1.5.1 Základní pojmy	50
1.5.2 Řešitelnost soustavy lineárních rovnic.....	52
1.5.3 Metody řešení soustav lineárních rovnic.....	54
Cvičení	63
1.6 Maticová algebra	65
1.6.1 Inverzní matice	65
1.6.2 Maticové rovnice	68
Cvičení	70
2. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.....	73
2.1 Funkce. Vlastnosti funkcí	74
2.1.1 Definice funkce.....	74
2.1.2 Vlastnosti funkcí	77
2.1.3 Základní elementární funkce.....	82
2.1.4 Operace s funkcemi. Transformace grafu funkce	89
2.1.5 Polynom. Racionální funkce.....	92
Cvičení	97
2.2 Limita funkcí	99
2.2.1 Definice limity	99
2.2.2 Nevlastní limita	101

2.2.3 Výpočet limity	102
Cvičení.....	105
2.3 Spojitost funkcí	106
Cvičení.....	107
2.4 Derivace funkcí.....	108
2.4.1 Definice a geometrický význam derivace.....	108
2.4.2 Pravidla pro derivování	109
2.4.3 Derivace složených funkcí	112
2.4.4 Derivace implicitních funkcí. Derivace funkcí tvaru fg	114
2.4.5 Derivace vyššího řádu.....	115
2.4.6 Diferenciál funkce.....	116
Cvičení.....	116
2.5 Užití derivací. Průběh funkce	118
2.5.1 L'Hospitalovo pravidlo	118
2.5.2 Monotónnost a extrémy funkce	121
2.5.3 Konvexnost, konkávnost. Inflexní body.....	127
2.5.4 Asymptoty grafu funkce.....	129
2.5.5 Průběh funkce	132
Cvičení.....	135
3. Diferenciální počet funkcí dvou proměnných	139
3.1 Pojem funkce dvou a více proměnných	140
3.1.1 Euklidovské prostory	140
3.1.2 Význačné body a množiny bodů v prostoru E_n	143
3.1.3 Definice funkce dvou a více proměnných	145
3.1.4 Grafické znázornění funkce dvou proměnných.....	148
Cvičení.....	150
3.2 Limita a spojitost funkcí dvou proměnných	150
3.2.1 Limita funkcí dvou proměnných	150
3.2.2 Spojitost funkcí dvou proměnných	154
Cvičení.....	154
3.3 Derivace funkcí dvou proměnných.....	155
3.3.1 Parciální derivace.....	155
3.3.2 Geometrický význam parciální derivace	156
3.3.3 Tečná rovina a normála plochy	157
3.3.4 Parciální derivace vyšších řádů	158
Cvičení.....	160
3.4 Extrémy funkcí dvou a více proměnných	161
3.4.1 Lokální extrémy funkcí dvou proměnných	161
3.4.2 Lokální extrémy funkcí tří proměnných.....	165
3.4.3 Vázané extrémy	166
3.4.3 Absolutní extrémy.....	169
Cvičení.....	171
4. Integrální počet funkcí jedné proměnné	173
4.1 Neurčitý integrál	174
4.1.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál	174
4.1.2 Přímá integrace pomocí vzorců a úprav integrandu	175

4.1.3 Integrace racionální funkce	180
4.1.4 Substituční metoda	184
4.1.5 Metoda „per partes“	187
4.1.6 Integrace metodou neurčitých koeficientů	190
Cvičení	191
4.2 Určitý integrál	193
4.2.1 Definice a vlastnosti určitého integrálu	193
4.2.2 Výpočet určitého integrálu	196
4.2.3 Geometrické aplikace určitého integrálu	198
Cvičení	204
4.3 Nevlastní integrál	205
4.3.1 Integrál nevlastní vzhledem k mezi	205
4.3.2 Integrál nevlastní vzhledem k funkci	207
Cvičení	210
5. Diferenciální rovnice	211
5.1 Základní pojmy	212
Cvičení	214
5.2 Diferenciální rovnice 1. řádu	215
5.2.1 Diferenciální rovnice typu $y' = f(x)$	215
5.2.2 Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými	216
5.2.3 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	218
Cvičení	221
5.3 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	222
5.3.1 Diferenciální rovnice typu $y'' = f(x)$	222
5.3.2 Zkrácená lineární diferenciální rovnice 2. řádu	223
5.3.3 Metoda variace konstant	226
5.3.4 Metoda neurčitých koeficientů	228
5.3.5 Skládání hlavních integrálů	232
Cvičení	232
6. Diferenční rovnice	235
6.1 Posloupnost. Diference posloupnosti	236
Cvičení	240
6.2 Diferenční rovnice	240
6.2.1 Základní pojmy	240
6.2.2 Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty	242
Cvičení	249
Výsledky cvičení	251
Literatura	269
Shrnutí	270
Rejstřík	271

O autorech

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.

Vystudoval odbornou matematiku na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně (1974). V rámci doktorského postgraduálního studia na Masarykově univerzitě v Brně studoval vlastnosti diskrétních algebraických struktur (1997). Touto problematikou se zabýval i ve své habilitační práci, která byla zaměřena na aplikaci diskrétních matematických struktur pro modelování procesů (2002).



Pedagogicky působil na Fakultě ekonomiky obrany státu VVŠ PV ve Vyškově, na Fakultě ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Přednášel především matematiku pro studenty ekonomických specializací, operační analýzu a ekonomicko-matematické metody. Zpracoval řadu studijních textů a skript zaměřených na základní kurz vyšší matematiky, teorii her a lineární programování. Je autorem a spoluautorem několika desítek odborných článků v oblasti teorie algebraických hyperstruktur a matematického modelování. V současné době je garantem předmětu Matematika na Fakultě vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně.

RNDr. Petr Rádľ

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně, obor matematika a deskriptivní geometrie (1972). Zde v roce 1981 složil státní rigorózní zkoušku. Po absolvování základní vojenské služby je od roku 1973 zaměstnán na Mendelově univerzitě v Brně. Působil na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty, v letech 2004–2007 byl vedoucím tohoto ústavu.



Přednášel matematiku, konstruktivní geometrii a technické kreslení v různých studijních programech prezenční i kombinované formy studia na všech fakultách univerzity a je spoluautorem skript používaných ke studiu těchto předmětů.

Řadu let byl garantem přijímacích zkoušek z matematiky na Mendelovu univerzitu a je vedoucím autorského kolektivu Sbírký příkladů z matematiky pro přijímací řízení. Externě přednášel technické kreslení na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde byl také členem komise pro státní závěrečné zkoušky ve studijním programu Matematika a Aplikovaná matematika. Od roku 2008 působí na Ústavu statistiky a operačního výzkumu Provozně ekonomické fakulty Mendelovy univerzity v Brně a přednáší matematiku studentům této fakulty.

Úvod

Znalost exaktních metod ekonomických teorií by měla v současné době patřit k nezbytné výbavě každého pracovníka na jakékoliv úrovni ekonomické praxe. Z toho pro něj jednoznačně vyplývá nutnost seznámit se s jejich matematickými základy.

Stěžejním cílem autorů této učebnice, stejně jako cílem výuky matematiky na ekonomických fakultách, je poskytnout studentům základní znalosti vyšší matematiky využitelné při studiu navazujících ekonomicko-matematických předmětů a při studiu kvantitativních metod aplikovaných v odborných ekonomických disciplínách.

Učebnice je rozdělena do šesti kapitol, které na sebe logicky navazují. Pro úspěšné studium určité kapitoly je nezbytné zvládnutí látky z předchozích kapitol. Vždy se přitom požaduje znalost středoškolské matematiky v obvyklém rozsahu. V každé kapitole je formou definic a vět bez důkazů shrnuta potřebná teorie. Způsob výkladu je přitom přizpůsoben odbornému zaměření studentů, kteří nestudují matematiku jako takovou, ale potřebují ji umět vhodně využívat. Přímo v základním textu jsou probírané pojmy a metody ilustrovány množstvím řešených příkladů. Další úlohy, označené jako cvičení, jsou určeny k samostatnému řešení. Výsledky těchto cvičení jsou uvedeny na konci knihy. Definice, věty, příklady i obrázky jsou vždy označeny dvojicí číslíc, z nichž první značí pořadové číslo kapitoly a druhá jejich pořadí uvnitř kapitoly. Značkou ■ jsou v textu kvůli větší přehlednosti označeny konce definic, vět a příkladů včetně jejich řešení.

Učebnice je určena především studentům prezenční i kombinované formy studia Provozní ekonomické fakulty Mendlovy univerzity v Brně a Fakulty vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně. Její obsah jednoznačně koresponduje se stávajícím studijním plánem prvních semestrů studia na zmíněných fakultách, kde oba autoři pedagogicky působí. Byla koncipována na základě skript a učebních textů, které jsou zaměřeny na dílčí části probírané problematiky a které byly používány při výuce základního kurzu matematiky na obou fakultách v posledním desetiletí. Zkušenosti z jejich používání, připomínky a názory jejich autorů i uživatelů byly při tvorbě této knihy využity a autoři za ně touto cestou srdečně děkují. Jedním z důležitých motivů vzniku předkládaného textu bylo shrnout celý obsah základního matematického kurzu do jediné učebnice, jejíž prostudování umožní studentům úspěšné zvládnutí předmětu Matematika.

Druhé vydání knihy reflektuje zkušenosti autorů a jejich spolupracovníků získané při jejím pětiletém intenzivním využívání.

Vzhledem k tomu, že mnohé další ekonomické fakulty v České republice mají ve svých studijních programech základní kurz vysokoškolské matematiky podobného obsahu i rozsahu, je možné, že po této učebnici sáhnou i studenti jiných vysokých škol, především ekonomického zaměření.

Všechny liché kapitoly napsal doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D., autorem sudých kapitol je RNDr. Petr Rádl.

Za mnohé cenné rady a připomínky autoři děkují doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc., RNDr. Ludmile Staré a RNDr. Milanu Vágnerovi.

KAPITOLA 1

Lineární algebra

Lineární algebra, jejíž základy se v této kapitole studují, se začala vytvářet jako samostatná matematická disciplína v 18. století, kdy byl zaveden pojem determinantu a ukázána metoda řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. V polovině 19. století se poprvé objevuje pojem matice a další metody řešení soustav lineárních rovnic. Lineární algebra však není pouze teoretickou matematickou disciplínou. Typická je její aplikovatelnost a široké použití v praxi. Bezprostředně je využíváno metod lineární algebry v lineárním programování, jež řeší celou řadu úloh ekonomického charakteru.

1.1 Základní pojmy z teorie množin

V úvodním odstavci uvádíme přehled základních pojmů teorie množin v míře nezbytně nutné pro pochopení všech dalších úvah. **Množinou** M rozumíme souhrn určitých objektů chápány jako samostatný celek. Tyto objekty nazýváme **prvky množiny** a značíme a, b, x, y . Zápisem $a \in M$, resp. $a \notin M$ rozumíme, že a je, resp. a není prvkem množiny M . Pro každý objekt a a množinu M platí právě jedna z možností $a \in M$ nebo $a \notin M$. Množinu, která nemá žádný prvek, značíme symbolem $\emptyset$ a říkáme jí **prázdná množina**. Množinu, která je souhrnem prvků $b_1, \dots, b_n$ označujeme symbolem $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Ze středoškolské matematiky jsou dále známy tyto zápisy a jejich význam:

- $A = B$ – **rovnost** množin A, B ,
- $A \subseteq B$ – množina A je **podmnožina** množiny B ,
- $A \cap B$ – **průnik** množin A, B ,
- $A \cup B$ – **sjednocení** množin A, B ,
- $A - B$ – **rozdíl** množin A, B , tedy množina právě těch prvků $x \in A$, pro které platí $x \notin B$.

Nechť M_1, M_2 jsou dvě množiny. Množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2) , kde $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$, se nazývá **kartézský součin** množin M_1, M_2 a značí se $M_1 \times M_2$. Jsou-li M_1, M_2 libovolné množiny, pak **binární relací** z množiny M_1 do množiny M_2 nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $M_1 \times M_2$.

Zobrazením f z množiny M_1 do množiny M_2 nazýváme každou binární relaci $f \subseteq M_1 \times M_2$ takovou, že každému prvku $x_1 \in M_1$ je přiřazen nejvýše jeden prvek $x_2 \in M_2$ s vlastností $(x_1, x_2) \in f$. Někdy se používá značení $f: M_1 \rightarrow M_2$. Je-li při zobrazování f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$, mluvíme o **zobrazení f množiny M_1 do množiny M_2** . Jestliže při zobrazování f z množiny M_1 do množiny M_2 existuje ke každému prvku $x_2 \in M_2$ alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení f z množiny M_1 na množinu M_2** . Jestliže je při zobrazování f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$ a ke každému prvku $x_2 \in M_2$ existuje alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení f množiny M_1 na množinu M_2** .

Důležitou roli v matematice i v jiných vědách hraje pojem (algebraické) operace. **Binární operaci** v množině M rozumíme každé zobrazení $M \times M \rightarrow M$, které každé uspořádané dvojici $(a, b) \in M$ přiřazuje nejvýše jeden prvek $c \in M$. Označíme-li binární operaci (dále jen operace) symbolem $\square$, můžeme psát $a \square b = c$.

Operaci $\square$ nazýváme **komutativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b \in M$ platí

$$a \square b = b \square a.$$

Operaci $\square$ nazýváme **asociativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b, c \in M$ platí

$$(a \square b) \square c = a \square (b \square c).$$

Operaci $\bullet$ nazýváme **distributivní** zleva resp. zprava k operaci $\square$ právě tehdy, když pro každé prvky $a, b, c \in M$ platí

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c)$$

resp.

$$(b \square c) \bullet a = (b \bullet a) \square (c \bullet a).$$

Je-li operace $\bullet$ komutativní, nemusíme rozlišovat zleva a zprava a používáme pouze jeden vztah

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c).$$

Výše uvedené rovnosti bývají také nazývány komutativní, asociativní a distributivní zákon.

Existuje-li v množině M takový prvek e , že pro každé $x \in M$ platí rovnost $x \square e = e \square x = x$, nazývá se tento prvek **neutrální** vzhledem k operaci $\square$. Je-li e neutrální prvek vzhledem k operaci $\square$ a existuje-li k prvku $a \in M$ prvek $\bar{a} \in M$ s vlastností $a \square \bar{a} = \bar{a} \square a = e$, nazýváme prvek $\bar{a}$ **inverzní**, případně **opačný prvek** k prvku a na množině M .

Nejjednoduššími příklady komutativních a asociativních operací jsou běžné operace sčítání a násobení na množině $\mathbf{N}_0$. Při operaci sčítání hraje roli neutrálního prvku číslo 0, při operaci násobení číslo 1. Inverzní prvek k žádnému číslu však v množině přirozených čísel neexistuje ani vzhledem k operaci sčítání, ani vzhledem k násobení. V množině reálných čísel jsou obě operace komutativní i asociativní a vzhledem k oběma operacím má každý prvek $a \in M$ inverzní prvek $\bar{a}$. Při sčítání je $\bar{a} = -a$, při násobení $\bar{a} = \frac{1}{a}$, neutrální prvky jsou opět 0 a 1.

Ve všech základních číselných množinách je operace násobení distributivní k operaci sčítání, tj. $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

S celou řadou jiných operací na různých množinách se budeme setkávat na dalších stranách této učebnice.

Operace, v níž se vyskytují pouze prvky množiny M , tj. $M \times M \rightarrow M$, se nazývá vnitřní. Vyskytují-li se při operaci kromě prvků množiny M i prvky jiné množiny, např. $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$, mluvíme o operaci vnější. Neprázdná množina, na níž je definována alespoň jedna (algebraická) operace, se nazývá **algebraická struktura**. Významnou algebraickou strukturou je vektorový prostor. Jeho studiem se budeme zabývat v následující kapitole.

Pro označování základních číselných množin je všude použito pevných symbolů takto:

$\mathbf{N}$ – množina všech přirozených čísel,

$\mathbf{N}_0$ – množina všech přirozených čísel včetně nuly,

$\mathbf{Z}$ – množina všech celých čísel,
 $\mathbf{R}$ – množina všech reálných čísel,
 $\mathbf{R}^+$ – množina všech reálných kladných čísel,
 $\mathbf{C}$ – množina všech komplexních čísel.

Cvičení

- 1.1 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá.
 a) $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$, b) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, c) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, d) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{R}$, e) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, f) $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$,
 g) $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$, h) $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \emptyset$, i) $\mathbf{N} - \mathbf{N} = \emptyset$, j) $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{N}$, k) $1 \in \mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$,
 l) $1 \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$.
- 1.2 Pro množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e, f\}$ sestrojte uvedené množiny.
 a) $A \cap B$, b) $B \cap A$, c) $A \cup B$, d) $B \cup A$, e) $A - B$, f) $B - A$,
 g) $A \times B$, h) $B \times A$.
- 1.3 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá a vyjadřují distributivní zákon.
 a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, d) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$,
 e) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.

1.2 Vektorové prostory

1.2.1 Pojem vektorového prostoru

Vektorový prostor je algebraická struktura $(V, +, \cdot)$ se dvěma operacemi. V je množina libovolných prvků, které značíme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... a říkáme jim vektory. Na V jsou zavedeny operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje v ní neutrální prvek, kterým je **nulový vektor** $\mathbf{o}$ a ke každému vektoru $\mathbf{a}$ existuje **opačný vektor** $-\mathbf{a}$. Operace násobení vektoru reálným číslem je asociativní a platí pro ni distributivní zákony vzhledem k operaci sčítání vektorů.

Definice 1.1 Množina V libovolných prvků, které značíme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a říkáme jim vektory, se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

- Je dáno zobrazení $V \times V \rightarrow V$, jež každé uspořádané dvojici vektorů $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V \times V$ přiřazuje vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ tak, že pro každé vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ platí axiomy:

$$(A1) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

$$(A2) \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$(A3) \text{ existuje vektor } \mathbf{o} \in V \text{ takový, že pro každý vektor } \mathbf{a} \in V \text{ platí } \mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a},$$

$$(A4) \text{ ke každému vektoru } \mathbf{a} \in V \text{ existuje vektor } \mathbf{a} \in V \text{ tak, že platí } \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}.$$

Toto zobrazení se nazývá **sčítání** na množině V a vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ je **součet** vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

- Je dáno zobrazení $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$, které každé uspořádané dvojici $(r, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times V$ přiřazuje vektor $r\mathbf{a} \in V$ tak, že pro každá reálná čísla $r, s \in \mathbf{R}$ a každé vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ platí axiomy:

$$(A5) \ 1\mathbf{a} = \mathbf{a},$$

$$(A6) \ r(s\mathbf{a}) = rs(\mathbf{a}),$$

$$(A7) \ (r+s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a},$$

$$(A8) \ r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}.$$

Toto zobrazení se nazývá **násobení** vektoru **reálným číslem** a vektor $r\mathbf{a}$ se nazývá **reálný násobek** vektoru $\mathbf{a}$. ■

Místo pojmu vektorový prostor se lze v literatuře setkat také s názvem **lineární prostor**.

Definice vektorového prostoru je značně obecná. Této definici vyhovuje celá řada množin s vhodně definovanými operacemi. Vektorovými prostory jsou například:

- Množina všech reálných posloupností s obvyklým sčítáním a násobením čísel, tedy $\{\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{a}_n\} + \{\mathbf{b}_n\}, \{r\mathbf{a}_n\} = r\{\mathbf{a}_n\}$.
- Množina všech funkcí definovaných na libovolné neprázdné množině spolu s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce reálným číslem, tedy $(f+g)(x) = f(x) + g(x), (rf)(x) = rf(x)$.
- Množina všech konvergentních posloupností.
- Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
- Množina všech matic stejného typu.

Rovněž pojem vektoru jakožto prvku vektorového prostoru je v tomto pojetí velmi obecný. Vektorem může být uspořádaná n -tice reálných čísel, ale také reálná funkce, reálná posloupnost, matice, reálné číslo apod.

Příklad 1.1 Uvažujme množinu všech přirozených čísel $\mathbf{N}$, na které definujeme součet přirozených čísel a reálný násobek přirozeného čísla obvyklým způsobem. Rozhodněme, zda množina $\mathbf{N}$ spolu s operací reálného násobku je vektorový prostor.

Řešení Aby množina $\mathbf{N}$ byla vektorovým prostorem, musí podle definice vektorového prostoru platit:

- Pro všechny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ z množiny $\mathbf{N}$ je jejich součet $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ opět vektor z $\mathbf{N}$, tedy množina $\mathbf{N}$ je uzavřená vzhledem ke sčítání.
- Pro každé $r \in \mathbf{R}$ je $r\mathbf{a} \in \mathbf{N}$, tedy množina $\mathbf{N}$ je uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem.
- V množině $\mathbf{N}$ platí axiomy (A1) až (A8).

Zatímco podmínka a) je zřejmě splněna, podmínka b) splněna není, neboť např. pro $r = -1, \mathbf{a} = 2$ neplatí $r\mathbf{a} \in \mathbf{N}$ a tedy množina $\mathbf{N}$ není uzavřená vůči násobení reálným číslem. Množina přirozených čísel $\mathbf{N}$ s obvykle definovanými operacemi tedy není vektorový prostor. ■

1.2.2 Aritmetický vektorový prostor

Definice 1.2 Uspořádanou n -tici reálných čísel $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbf{N}$, nazýváme **n -rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme **souřadnicemi aritmetického vektoru $\mathbf{a}$** . ■

Definice 1.3 **Součtem aritmetických vektorů** $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ nazýváme aritmetický vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$. ■

Příklad 1.2 Pro aritmetické vektory $\mathbf{a} = (-1, 6, 14)$ a $\mathbf{b} = (1, -17, -13)$ je jejich součtem aritmetický vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, -11, 1)$. ■

Definice 1.4 Necht' $r \in \mathbf{R}$. **Reálným r -násobkem aritmetického vektoru $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$** je aritmetický vektor $r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n)$. ■

Příklad 1.3 Pro aritmetické vektory $\mathbf{a} = (-1, 6)$, $\mathbf{b} = (2, -4)$ platí $5\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (1, 18)$. ■

Definice 1.5 **Opačným aritmetickým vektorem** k aritmetickému vektoru $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ nazýváme aritmetický vektor $-\mathbf{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$. **Rozdílem aritmetických vektorů $\mathbf{a} - \mathbf{b}$** rozumíme součet aritmetického vektoru $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a aritmetického vektoru opačného k aritmetickému vektoru $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, tedy $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_n) + (-b_1, \dots, -b_n) = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$. ■

Definice 1.6 Aritmetický vektor $\mathbf{o}$, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tedy $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$, nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**. ■

Definice 1.7 Řekneme, že aritmetický vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je **roven** aritmetickému vektoru $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, jestliže platí $a_j = b_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. ■

Označme nyní symbolem V_n množinu všech n -rozměrných aritmetických vektorů.

Věta 1.1 Jestliže na množině V_n definujeme součet aritmetických vektorů z V_n a reálný násobek aritmetického vektoru z V_n vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n),$$

pak V_n je vektorový prostor. ■

Definice 1.8 Množina V_n všech aritmetických vektorů, na které jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad \text{a} \quad r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n),$$

se nazývá **n -rozměrný aritmetický vektorový prostor**. ■

Z definice aritmetického vektorového prostoru a předcházející věty je zřejmé, že každý aritmetický vektorový prostor je vektorovým prostorem ve smyslu definice 1.1 a stejně tak každý aritmetický vektor je vektorem.

Kromě operace násobení vektoru reálným číslem, zavádíme v aritmetickém vektorovém prostoru ještě jiné násobení, a to tzv. skalární součin vektorů.

Definice 1.9 **Skalárním součinem** aritmetických vektorů $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ rozumíme číslo $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. ■

Příklad 1.4 Skalárním součinem aritmetických vektorů $\mathbf{a} = (6, -3, 0, -9)$ a $\mathbf{b} = (2, -1, 5, -3)$ je číslo $\mathbf{ab} = 6 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + (-9) \cdot 3 = -12$. ■

1.2.3 Podprostor vektorového prostoru

Definice 1.10 Necht' V je vektorový prostor, W neprázdná podmnožina množiny V . Řekneme, že množina W je **podprostor vektorového prostoru** V a píšeme $W \subset V$, jestliže platí:

- (1) Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$.
- (2) Pro každé reálné číslo $r \in \mathbf{R}$ a každý vektor $\mathbf{a} \in W$ je $r\mathbf{a} \in W$. ■

Podprostor W vektorového prostoru V je vždy vektorovým prostorem. Vyplyvá to z toho, že v podprostoru W platí axiomy (A1)–(A8) a podle podmínek (1) a (2) z definice podprostoru je množina W uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

Necht' $\mathbf{o}$ je nulový vektor vektorového prostoru V . Jednoprvková množina obsahující pouze nulový vektor, tedy množina $\{\mathbf{o}\}$ je podprostor vektorového prostoru V . Množina $\{\mathbf{o}\}$ se nazývá **triviální vektorový prostor**. Triviální vektorový prostor je jediný vektorový prostor, který má konečný počet prvků (obsahuje-li vektorový prostor alespoň jeden nenulový vektor, pak obsahuje současně všechny reálné násobky tohoto vektoru a těch je nekonečný počet).

Ve smyslu shora uvedené definice je podprostorem libovolného vektorového prostoru V také celý vektorový prostor V .

Definice 1.11 Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V . Řekneme, že vektor $\mathbf{a}$ je **lineární kombinací** vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, jestliže existují reálná čísla $c_1, \dots, c_k$ taková, že platí $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$. Čísla $c_1, \dots, c_k$ se nazývají **koefficienty lineární kombinace**. ■

Příklad 1.5 Nulový vektor $\mathbf{o}$ je lineární kombinací libovolné skupiny vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ z vektorového prostoru V , protože platí $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k$. Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koefficienty rovny nule, se nazývá **triviální lineární kombinace**. ■

Příklad 1.6 Zjistíme, zda vektor $\mathbf{a} = (2, 1, 6)$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1 = (4, 0, -1)$ a $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 5)$.

Řešení Podle definice lineární kombinace je třeba najít reálná čísla c_1, c_2 tak, aby platilo

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2.$$

Po dosazení souřadnic vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ do této rovnice obdržíme

$$(2, 1, 6) = (4c_1 + 2c_2, 0c_1 + 0c_2, -1c_1 + 5c_2).$$

Podle definice rovnosti aritmetických vektorů to znamená, že platí

$$2 = 4c_1 + 2c_2,$$

$$1 = 0c_1 + 0c_2,$$

$$6 = -1c_1 + 5c_2.$$

Zřejmě neexistují žádná reálná čísla c_1, c_2 vyhovující této soustavě rovnic (viz druhá rovnice), proto vektor $\mathbf{a}$ není lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. ■

Pojem lineární kombinace vektorů nám umožňuje demonstrovat další příklad podprostoru vektorového prostoru V . Uvažujme vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ z vektorového prostoru V . Označme $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ množinu všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, tedy $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k] = \{\mathbf{a} \in V; \mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k, c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}\}$.

Definice 1.12 Necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V . Množina $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ se nazývá **lineární obal** množiny vektorů $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. ■

Věta 1.2 Jsou-li $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektory z vektorového prostoru V , pak je jejich lineární obal $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ podprostor vektorového prostoru V . ■

Lineární obal $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ je podprostor vektorového prostoru a jako takový je sám vektorovým prostorem. Vektorový prostor $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$ je zřejmě „nejmenší“ vektorový prostor obsahující všechny vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice 1.13 Necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V . Jestliže každý vektor $\mathbf{a} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, říkáme, že vektorový prostor V je **generován** vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ a této množině vektorů říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V . ■

Z uvedené definice vyplývá, že množina vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ je množinou generátorů vektorového prostoru V právě tehdy, když platí $V = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k]$.

Triviální vektorový prostor je generován nulovým vektorem $\mathbf{o}$.

Příklad 1.7 Dvojice vektorů $\mathbf{j}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{j}_2 = (0, 1)$ je množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2 . Snadno ověříme, že libovolný vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ ve tvaru $\mathbf{a} = a_1\mathbf{j}_1 + a_2\mathbf{j}_2$. ■

Příklad 1.8 Rozhodněme, zda vektory $\mathbf{x} = (1, -3)$, $\mathbf{y} = (-1, 4)$ jsou množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2 .

Řešení Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ generují prostor V_2 , jestliže pro každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ existují reálná čísla c_1, c_2 tak, že platí $\mathbf{a} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}$.

Po dosazení souřadnic vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ do předchozího vztahu obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 - c_2, \\ a_2 &= -3c_1 + 4c_2. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li první rovnici čtyřmi a obě rovnice sečteme, získáme $c_1 = 4a_1 + a_2$.

Obdobně po vynásobení první rovnice třemi a následném sečtení máme

$$c_2 = 3a_1 + a_2.$$

Protože každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ z V_2 je možné napsat ve tvaru $\mathbf{a} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = (4a_1 + a_2)\mathbf{x} + (3a_1 + a_2)\mathbf{y}$, je prostor V_2 generován vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. ■

Příklad 1.9 Množinou generátorů vektorového prostoru V_2 jsou také vektory $\mathbf{x} = (3,0)$, $\mathbf{y} = (5,1)$, $\mathbf{z} = (0,4)$, neboť pro každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ platí např.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{3}a_1\mathbf{x} + 0\mathbf{y} + \frac{1}{4}a_2\mathbf{z}.$$

Z uvedených příkladů je vidět, že množina generátorů vektorového prostoru V není jediná a že dokonce ani počet generátorů není jednoznačně určen.

Bližší představu o množinách generátorů vektorového prostoru V dává následující věta.

Věta 1.3 Necht' $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je množina vektorů z vektorového prostoru V a $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q\}$ je množina vektorů, která vznikla z množiny vektorů $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ jedním z následujících způsobů:

- změnou pořadí vektorů,
- násobením libovolného vektoru nenulovým reálným číslem,
- přičtením k libovolnému vektoru lineární kombinace ostatních vektorů,
- vynecháním vektoru, který je lineární kombinací ostatních,
- přidáním vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů.

Jestliže množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V , pak také množina vektorů $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_q\}$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V .

Z uvedené věty vyplývá, že každý netriviální vektorový prostor má nekonečně mnoho množin generátorů. Věta navíc uvádí seznam úprav, kterými můžeme z jedné množiny generátorů vektorového prostoru vytvořit jinou. S podobnými úpravami se v první kapitole knihy setkáme na více místech (hodnost matice, řešení soustav lineárních rovnic).

1.2.4 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice 1.14 Necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V . Řekneme, že vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou **lineárně závislé**, jestliže existují reálná čísla $c_1, \dots, c_k$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$. V opačném případě se vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ nazývají **lineárně nezávislé**. Mluvíme také o lineární závislosti, resp. lineární nezávislosti množiny vektorů $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou podle uvedené definice lineárně nezávislé právě tehdy, když ze všech jejich možných lineárních kombinací je nulovému vektoru $\mathbf{o}$ rovna pouze jejich triviální lineární kombinace. Vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou pak lineárně závislé právě tehdy, když existuje současně nějaká jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru $\mathbf{o}$.

Uvědomme si přitom, že pro $k = 1$, tedy v případě jednoho vektoru $\mathbf{a}_1$, je tento vektor lineárně závislý právě tehdy, když je nulový. Pouze pro nulový vektor $\mathbf{o}$ totiž platí rovnice $c_1\mathbf{o} = \mathbf{o}$, kde c_1 je různé od nuly. Nenulový vektor $\mathbf{a}_1$ je vždy lineárně nezávislý, neboť rovnice $c_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{o}$ je splněna jen tehdy, když $c_1 = 0$.

Příklad 1.10 Rozhodněme, zda vektory $\mathbf{a}_1 = (-1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 6)$ patřící do aritmetického vektorového prostoru V_2 jsou lineárně závislé či nezávislé.

Řešení Podle definice 1.14 je třeba zjistit, pro která reálná čísla c_1, c_2 je splněna rovnice $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{o}$.

Po dosazení souřadnic vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{o}$ do této rovnice dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$-c_1 + 2c_2 = 0,$$

$$3c_1 + 6c_2 = 0.$$

Snadno se zjistí, že soustava má jediné řešení $c_1 = c_2 = 0$ a že nulovému vektoru $\mathbf{o}$ je rovna pouze triviální kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ jsou tedy lineárně nezávislé. ■

Při rozhodování o lineární závislosti či nezávislosti vektorů je možno někdy výhodně využít následujících dvou vět 1.4 a 1.5.

Věta 1.4 Necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V , $k \geq 2$. Vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. ■

Každá skupina vektorů obsahující nulový vektor $\mathbf{o}$ je lineárně závislá. Vyplývá to z předchozí věty a z toho, že nulový vektor je triviální kombinací ostatních vektorů. Dva vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je reálným násobkem druhého.

Příklad 1.11 Rozhodněme, zda vektory $\mathbf{a}_1 = (3, 1, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 4, 5)$ z aritmetického vektorového prostoru V_3 jsou lineárně závislé či nezávislé.

Řešení Je ihned vidět, že $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. Vektor $\mathbf{a}_3$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, což podle předchozí věty 1.4 znamená, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ jsou lineárně závislé. ■

Věta 1.5 Necht' $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V , $k \geq 2$. Pak také vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. ■

V podkapitole 1.3 o maticích si ukážeme, že o lineární závislosti či nezávislosti aritmetických vektorů se dá efektivně rozhodnout prostřednictvím pojmu hodnoty matice.

1.2.5 Báze a dimenze vektorového prostoru

Z předchozího odstavce víme, že každý vektorový prostor V má nekonečně mnoho množin generátorů, přičemž jednotlivé množiny generátorů se mohou lišit počtem vektorů. Jsou-li vektory množiny generátorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ lineárně závislé, pak alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních vektorů a takový vektor lze podle věty 1.3 z množiny generátorů vynechat. Vynecháme-li takto v množině generátorů všechny vektory, které se dají vyjádřit ve tvaru lineární kombinace ostatních vektorů, dostaneme množinu generátorů tvořenou lineárně nezávislými vektory. Takovými množinami generátorů se budeme dále zabývat.

Definice 1.15 Množina generátorů vektorového prostoru V , jejíž vektory jsou lineárně nezávislé, se nazývá **báze vektorového prostoru**. ■

Příklad 1.12 Ukažme, že vektory $\mathbf{j}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{j}_3 = (0, 0, 1)$, tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru V_3 .

Řešení Každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ ve tvaru $\mathbf{a} = a_1\mathbf{j}_1 + a_2\mathbf{j}_2 + a_3\mathbf{j}_3$, tedy vektory $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ generují vektorový prostor V_3 .

Přitom rovnice $c_1\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{j}_2 + c_3\mathbf{j}_3 = \mathbf{0}$ vede na soustavu rovnic

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 = 0,$$

$$c_3 = 0,$$

která má jediné řešení a vektory $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ jsou tedy lineárně nezávislé. Ukázali jsme, že vektory $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ generují vektorový prostor V_3 a jsou zároveň lineárně nezávislé. Podle definice 1.17 tvoří tedy bázi vektorového prostoru V_3 . ■

Věta 1.6 Necht' $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je množina generátorů vektorového prostoru V , tedy každý vektor $\mathbf{a} \in V$ se dá napsat ve tvaru $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$. Vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří bázi vektorového prostoru právě tehdy, když koeficienty $c_1, \dots, c_k$ jsou určeny jednoznačně. ■

Necht' $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ je báze vektorového prostoru V . Podle předchozí věty lze každý vektor $\mathbf{a} \in V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$. Koeficienty $c_1, \dots, c_k$ této lineární kombinace se nazývají **souřadnice vektoru $\mathbf{a}$ vzhledem k bázi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$** .

Věta 1.7 Necht' V je vektorový prostor s bází $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. Pak každá množina k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in V$ tvoří také bázi vektorového prostoru V . ■

Příklad 1.13 Rozhodněme, zda vektory $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru V_3 .

Řešení Víme, že ve V_3 existuje báze o třech vektorech (např. $\mathbf{j}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{j}_3 = (0, 0, 1)$), takže podle předchozí věty stačí ověřit lineární nezávislost vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Vyjdeme z rovnice $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, dosadíme souřadnice vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{0}$ a obdržíme soustavu lineárních rovnic

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

Odečteme-li od součtu prvních dvou rovnic třetí rovnici, dostaneme $c_1 = 0$ a dále $c_2 = c_3 = 0$. Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi V_3 . ■

Je zřejmé, že báze netriviálního vektorového prostoru není jediná. Vzniká otázka, zda různé báze téhož vektorového prostoru se mohou lišit počtem vektorů. Na tuto otázku odpovídá následující věta a její důsledek.

Věta 1.8 Existuje-li ve vektorovém prostoru V báze o k vektorech, pak každá množina vektorů obsahující více než k vektorů je lineárně závislá. ■

Důsledek Jestliže $a_1, \dots, a_k$ a $b_1, \dots, b_q$ jsou dvě báze vektorového prostoru V , pak platí $k = q$. ■

Zjistili jsme tedy, že počet vektorů v libovolné bázi vektorového prostoru je vždy stejný. Číslo udávající počet vektorů v libovolné bázi je pro každý vektorový prostor charakteristické a nazývá se dimenzí vektorového prostoru.

Definice 1.16 Počet vektorů v libovolné bázi vektorového prostoru V se nazývá **dimenze** vektorového prostoru V a značí se $\dim V$. ■

Z věty 1.8. vyplývá, že dimenze vektorového prostoru V je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů ve V . V triviálním vektorovém prostoru báze neexistuje, protože $\mathbf{0}$ není nezávislý vektor, proto je přirozené mu přiřadit dimenzi rovnou 0.

Příklad 1.14 Nejčastěji používanou bází aritmetického vektorového prostoru V_n je množina n -rozměrných jednotkových vektorů v počtu n , tedy množina vektorů

$$\mathbf{j}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{j}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

...

$$\mathbf{j}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Tyto vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé a protože pro každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ platí $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{j}_1 + \dots + a_n \mathbf{j}_n \in V_n$, tvoří vektory $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_n$ množinu generátorů prostoru V_n . Můžeme tedy říkat, že V_n je aritmetický vektorový prostor dimenze n nebo n -rozměrný aritmetický vektorový prostor a psát $\dim V_n = n$. ■

Cvičení

1.4 Rozhodněte, které z následujících číselných množin spolu s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor.

- Množina všech reálných čísel $\mathbf{R}$, kde součet reálných čísel a reálný násobek reálného čísla definujeme obvyklým způsobem.
- Množina všech kladných čísel $\mathbf{R}^+$, kde součet kladných čísel a reálný násobek kladného čísla definujeme obvyklým způsobem.
- Množina všech přirozených čísel $\mathbf{N}$, kde součet přirozených čísel a reálný násobek přirozeného čísla definujeme obvyklým způsobem.
- Množina všech sudých čísel, kde součet sudých čísel a reálný násobek sudého čísla definujeme obvyklým způsobem.
- Jednoprvková množina $\{1\}$.
- Jednoprvková množina $\{0\}$.

1.5 Pro vektory $\mathbf{a} = (2, -1, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (4, 2, -3, -1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 0, -1)$ vypočtěte.

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$,
- $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
- $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$,

- d) $-3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$,
 e) $4(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 3\mathbf{c}$,
 f) $5\mathbf{a} - 6\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$.

1.6 Jsou dány aritmetické vektory $\mathbf{a} = (4, -2, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (5, 0, 4, -2)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 3, -3)$, $\mathbf{d} = (5, -2, 4, 0)$. Zapište všechny platné vztahy dominování mezi těmito vektory.

1.7 Vektor $\mathbf{a}$ vyjádřete jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

- a) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{a}_1 = (-5, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 3)$,
 b) $\mathbf{a} = (3, 7)$, $\mathbf{a}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 4)$,
 c) $\mathbf{a} = (8, 3, 2)$, $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, 3)$,
 d) $\mathbf{a} = (8, 3, 2)$, $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)$,
 e) $\mathbf{a} = (4, 9, -17)$, $\mathbf{a}_1 = (5, 3, -4)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, 3)$.

1.8 Rozhodněte, zda dané vektory tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V_2 .

- a) $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1)$,
 b) $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0)$,
 c) $\mathbf{a}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1)$,
 d) $\mathbf{a}_1 = (4, 8)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 4)$,
 e) $\mathbf{a}_1 = (-2, -4)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 8)$,
 f) $\mathbf{a}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3)$,
 g) $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 7)$.

1.9 Rozhodněte, zda dané vektory tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V_3 .

- a) $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)$,
 b) $\mathbf{a}_1 = (7, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 3, 2)$,
 c) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)$,
 d) $\mathbf{a}_1 = (1, 4, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 6)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 7, -9)$,
 e) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 5)$,
 f) $\mathbf{a}_1 = (-3, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 1, 1)$,
 g) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4, 7)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 3, 6)$,
 h) $\mathbf{a}_1 = (-3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-5, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 2)$.

1.10 Rozhodněte o lineární závislosti či lineární nezávislosti vektorů.

- a) $\mathbf{a}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -3)$,
 b) $\mathbf{a}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3)$,
 c) $\mathbf{a}_1 = (-3, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2)$,
 d) $\mathbf{a}_1 = (5, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0)$,
 e) $\mathbf{a}_1 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -2, 4)$,

$$\text{f) } \mathbf{a}_1 = (-1, -2, 0), \mathbf{a}_2 = (3, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (2, -1, 1),$$

$$\text{g) } \mathbf{a}_1 = (3, 5, -2), \mathbf{a}_2 = (0, -1, 1), \mathbf{a}_3 = (6, 7, -1),$$

$$\text{h) } \mathbf{a}_1 = (1, 3, 5), \mathbf{a}_2 = (0, 0, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 1, 0).$$

1.11 Rozhodněte, zda dané vektory tvoří bázi příslušného vektorového prostoru.

$$\text{a) } \mathbf{a} = (2, 0), \mathbf{b} = (0, 1), V_2,$$

$$\text{b) } \mathbf{a} = (4, -1), \mathbf{b} = (3, 2), V_2,$$

$$\text{c) } \mathbf{a} = (3, 0), \mathbf{b} = (1, 1), \mathbf{c} = (0, 1), V_2,$$

$$\text{d) } \mathbf{a} = (3, 0, 0), \mathbf{b} = (1, 1, 1), \mathbf{c} = (0, 0, 1), V_3,$$

$$\text{e) } \mathbf{a} = (2, 0, 7), \mathbf{b} = (-1, 1, 3), V_3,$$

$$\text{f) } \mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (1, 0, 1), V_3,$$

$$\text{g) } \mathbf{a} = (7, 1, 0), \mathbf{b} = (6, -3, -2), \mathbf{c} = (1, 4, 2), V_3,$$

$$\text{h) } \mathbf{a} = (0, 0, 1, 0), \mathbf{b} = (1, 0, 0, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 0, 1), \mathbf{d} = (0, 1, 0, 0), V_4.$$

1.12 Vektor $\mathbf{a}$ vyjádřete v bázi B .

$$\text{a) } \mathbf{a} = (3, -4), B = \{\mathbf{a}_1 = (3, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 2)\},$$

$$\text{b) } \mathbf{a} = (-1, 3), B = \{\mathbf{a}_1 = (3, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 2)\},$$

$$\text{c) } \mathbf{a} = (4, 2, 3), B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)\},$$

$$\text{d) } \mathbf{a} = (1, -2, 5), B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)\},$$

$$\text{e) } \mathbf{a} = (10, 2, 3), B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (1, 0, 0)\},$$

$$\text{f) } \mathbf{a} = (-3, 1, 2), B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)\}.$$

1.3 Matice

1.3.1 Pojem matice

Definice 1.17 Uspořádané schéma tvořené $m \times n$ reálnými čísly tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

se nazývá **matice typu $m \times n$** . ■

Matice značíme velkými písmeny $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{E}$, přičemž v případě potřeby značíme dolním indexem typ matice. Matici (1.1) značíme $\mathbf{A}_{m \times n}$ nebo stručně $\mathbf{A}$. Jiný možný způsob zápisu je $[a_{ij}]$ nebo $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Vektory z aritmetického vektorového prostoru V_n $\mathbf{r}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbf{r}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ se nazývají **řádkové vektory** nebo stručně **řádky** matice $\mathbf{A}$.

Vektory z aritmetického vektorového prostoru V_m $\mathbf{s}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, \mathbf{s}_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ se nazývají **sloupcové vektory** nebo stručně **sloupce** matice $\mathbf{A}$.

Reálným číslům a_{ij} říkáme **prvky** matice A . Přitom a_{ij} značí prvek, který leží v i -tém řádku a v j -tém sloupci matice A . Index i se nazývá **řádkový index** prvku a_{ij} a index j **sloupcový index** prvku a_{ij} .

Prvky matice (1.1) $a_{11}, \dots, a_{mm}$ při $m \leq n$, případně prvky $a_{11}, \dots, a_{nn}$ při $m \geq n$ tvoří **hlavní diagonálu** matice A .

Analogicky se definuje pojem **vedlejší diagonály**. Vedlejší diagonálu při $m \leq n$ tvoří prvky $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{m,n-m+1}$ a při $m \geq n$ jsou to prvky $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$.

Příklad 1.15 Matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

je příkladem matice typu 3×4 . Vektor $r_2 = (3, 5, 0, 2)$ je druhý řádek matice A , vektor $s_3 = (6, 0, 0)$ je třetí sloupec matice A . Prvek $a_{13} = 6$, kdežto prvek $a_{31} = 4$. Hlavní diagonálu matice A tvoří prvky $a_{11} = 2, a_{22} = 5, a_{33} = 0$. Vedlejší diagonálu matice A tvoří prvky $a_{14} = 4, a_{23} = 0, a_{32} = -2$. ■

V následujících definicích se seznámíme s některými důležitými typy matic. Se zavedenými pojmy se budeme v následujících odstavcích a kapitolách často setkávat.

Definice 1.18 Necht' A, B jsou matice stejného typu $m \times n$. Říkáme, že matice A, B jsou si **rovný** a píšeme $A = B$, jestliže pro každé $i = 1, \dots, m$ a každé $j = 1, \dots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$. ■

Definice 1.19 Matice typu $m \times n$, pro jejíž všechny prvky platí $a_{ij} = 0$, kde $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, se nazývá **nulová matice** typu $m \times n$. Nulovou matici značíme $O_{m \times n}$. Je-li typ nulové matice ze souvislosti zřejmý, je běžné použití stručnějšího zápisu O . ■

Definice 1.20 **Čtvercová matice** řádu n je matice A typu $m \times n$, pro níž platí $m = n$. ■

Definice 1.21 **Jednotková matice** E_n řádu n je čtvercová matice řádu n , která má všechny prvky v hlavní diagonále rovny jedné a všechny prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou rovny nule. ■

Příklad 1.16

Matice

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je nulová matice typu 2×4 .

Matice

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jednotková matice řádu 3. ■