

MATEMATIKA **PRO BYSTRÉ A NADANÉ ŽÁKY**

Úlohy pro žáky
1. stupně ZŠ, jejich
rodiče a učitele



Irena Budínová
Růžena Blažková
Milena Vaňurová
Helena Durnová



ŠKÁLY PRO IDENTIFIKACI NADÁNÍ • ZKUŠENOSTI S NADANÝMI ŽÁKY

Matematika pro bystré a nadané žáky

Vyšlo také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.edika.cz
www.albatrosmedia.cz



**Irena Budínová, Růžena Blažková,
Milena Vaňurová, Helena Durnová**
Matematika pro bystré a nadané žáky – e-kniha
Copyright © Albatros Media a. s., 2016

Všechna práva vyhrazena.
Žádná část této publikace nesmí být rozšiřována
bez písemného souhlasu majitelů práv.

ALBATROS  **MEDIA a.s.**

Úvod 5

1/ Nadané děti	6
1.1/ Nadané děti a jejich okolí	6
1.2/ Mýty o nadaných dětech	7
1.3/ Identifikace nadaných dětí	8
1.4/ Podvýkonnost	9
1.5/ Dvojí výjimečnost	10
1.6/ Škály charakteristik nadaných dětí	11
2/ Matematicky nadané děti	14
2.1/ Zkušenosti s nadanými žáky	15
3/ Tvorba úloh pro bystré a nadané děti	20
3.1/ Modifikace zadání	20
3.2/ Tvorba úloh s rostoucí náročností	24
4/ Úlohy	26
4.1/ Úlohy pro bystré a nadané prvňáčky	26
4.1.1/ Housenky	26
4.1.2/ Pyramidy	28
4.1.3/ Magické čtverce a sudočku	29
4.1.4/ Rovnoramenné váhy a houpačky	30
4.1.5/ Algebrogramy	31
4.1.6/ Slovní úlohy	32
4.2/ Schémata pro odvalování kostky	34
4.3/ Potrubí	36
4.4/ Hrajeme si s čísly	38
4.4.1/ Operace s čísly	38
4.4.2/ Rovnoramenné váhy	39
4.4.3/ Myslím si číslo	40
4.4.4/ Číselné obrazce a schémata	41
4.4.5/ Součty více čísel	42
4.4.6/ Jak jsou staří?	43
4.4.7/ Nahrazujeme písmena čísly – řešíme algebrogramy	44
4.4.8/ Úlohy o přelévání	44
4.4.9/ Skupiny o daném počtu	45
4.4.10/ Diofantické rovnice	46
4.4.11/ Úlohy se skupinami prvků	47

4.5/ Sledování zákonitostí	49
4.5.1/ Obrázkové řady	49
4.5.2/ Řady čísel	50
4.5.3/ Číselné řady sestavené do geometrických obrazců	51
4.5.4/ Slovní úlohy rozvíjející funkční myšlení	52
4.5.5/ Objevování zákonitostí, zobecňování	53
4.6/ Problémové úlohy	54
4.6.1/ Logické úlohy a matematické problémy	55
4.6.2/ Výměnný obchod	57
4.6.3/ Úlohy o penězích a o čase	58
4.6.4/ Úlohy o tyčinkách	59
4.6.5/ Matematická kouzla	59
4.7/ Rozvoj geometrické představivosti	60
4.8/ Početní geometrické úlohy	70
4.9/ Hledáme všechny možnosti	73
4.9.1/ Skupiny, ve kterých nejsou prvky uspořádány a neopakují se	74
4.9.2/ Skupiny, ve kterých záleží na pořadí prvků a prvky se neopakují	74
4.9.3/ Skupiny, ve kterých prvky nejsou uspořádány a mohou se opakovat	75
4.9.4/ Skupiny, ve kterých záleží na pořadí prvků a prvky se mohou opakovat	76
4.10/ Jednotažky a jiné grafy	78
4.10.1/ Kreslení grafů jedním tahem	78
4.10.2/ Hledání nejkratší cesty	81

5/ Výsledky cvičení	83
----------------------------	-----------

Literatura	95
-------------------	-----------

ÚVOD

V problematice nadaných stále přetrvávají mýty jak mezi rodiči, tak mezi učiteli, které nadaným žákům znesnadňují školní existenci. Tvrdí se například, že nadané děti nepotřebují zvláštní péči, protože si vystačí samy. Nadané děti mohou mít všechna specifika jako ostatní děti a také různé poruchy učení.

Při své mnohaleté práci s nadanými žáky jsme se setkaly s několika dětmi mimořádně matematicky nadanými, avšak s celou řadou dětí nadprůměrně nadaných nebo bystrých, a pak také s dětmi, které měly k matematice velmi pozitivní vztah, přestože v ní nedosahovaly vynikajících výsledků. Každá tato skupina byla velmi specifická a vyžadovala zvláštní přístup. Mimořádně matematicky nadané děti rády promýšlí úlohy do hloubky, nerady používají nabízené algoritmy, mnoho úloh počítají „z hlavy“. Naproti tomu mezi nadanými a bystrými dětmi byla většina těch, které rády kopírovaly naučený algoritmus, rády si „hrály s čísly“, nepromýšlely problémy tolik do hloubky. Ani poslední skupinu dětí s pozitivním vztahem k matematice nemůžeme přehlížet. Nejdůležitější je matematiku jim neznechutit, protože i tyto děti si mohou zvolit profesi, v níž budou matematiku aktivně využívat.

Mezi dětmi dále byla řada dětí s tzv. dvojí výjimečností. Setkaly jsme se s žáky s kombinací nadání a ADHD, či s poruchou učení, kteří se potýkali s nevstřícným přístupem vyučujících.

Potvrdily jsme si, že všeobecně nadané děti nemusí dosahovat v matematice takových výsledků, které se od nich zpravidla očekávají. Matematicky nadané dítě obvykle vyniká jen v některých částech matematiky – např. rádo počítá numerické výpočty (aritmetické myšlení), nebo se rádo zabývá závislostmi (algebraické myšlení), nebo rádo zvažuje různé možnosti a hledá všechna řešení (kombinační myšlení), nebo rádo řeší problémové a logické úlohy (rozvinutá logika), nebo rádo řeší početní geometrické úlohy, nebo rádo maluje a rýsuje (geometrické myšlení). U některých dětí se setkáváme i s kombinací těchto přístupů, avšak jen minimum nadaných dětí vyniká ve všech oblastech současně.

Pozorovaly jsme, jak děti přistupují k řešení problémů. Některá řešení byla velmi neočekávaná a originální. Následuje teorie, která obsahuje některé v poznatky o nadaných dětech uvedené v literatuře, naše zkušenosti, 34 řešených úloh a následně 294 neřešených úloh s výsledky pro nadané a bystré žáky.

1/ NADANÉ DĚTI

1.1/ Nadané děti a jejich okolí

Nadání je obtížně definovatelný pojem. V průběhu historie se definice nadání měnila podle toho, jak docházelo k proměnám v chápání pojmu. Některé přístupy chápou nadání jako **projev** vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako **potenciál** podávat nadprůměrný výkon v jakékoli hodnotné oblasti, případně jako potenciál rozvíjet svou **kreativitu** (Havigerová, 2011). Velmi častá je IQ definice, která jako nadaného označuje každého, kdo má **nadprůměrnou hodnotu inteligenčního kvocientu**, obvykle $IQ > 130$ (Havigerová, 2011). Tento přístup je výhodný z pohledu měřitelnosti a také srovnání výkonů nadaných jedinců. Pro učitele matematiky však nemusí být příliš vypovídající, neboť nerozlišuje obor, ve kterém jedinec vyniká. Také nezohledňuje motivaci jedince a zájem o matematiku.

My budeme nadání chápat jako *dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoli hodnotné oblasti lidského snažení* (Havigerová, Křováčková a kol., 2011, s. 5). Cílem výuky matematiky přitom je tento potenciál objevit a rozvíjet jej tak, aby z něj dítě vytěžilo maximum.

Co ale znamená **nadprůměrný výkon**? Podle výše inteligenčního kvocientu lze odvozovat různé **stupně nadání**. Inteligenční kvocient vyjadřuje hodnotu výkonu určitého jedince na stupnici, v níž číslo 100 znamená právě průměrný výkon. Čísla menší než 100 značí různé stupně podprůměrných výkonů a čísla větší než 100 značí různé stupně nadprůměrných výkonů (Havigerová, 2011). Výkon lze rozdělit do určitých intervalů. Ve výzkumech (např. Nordby, cit. dle Havigerová, 2011) jsou standardně užívány tyto intervaly a označení:

IQ	Označení úrovně kognitivních schopností jedince	Výskyt v populaci
115–130	Bystrý jedinec	14 %
131–145	Nadprůměrně nadaný	2 %
141–160	Vysoce nadaný	0,1 %
161–175	Mimořádně nadaný ¹	
176–190	Velmi vysoce nadaný	
190+	„Nevyléčitelně“ nadaný	

Toto rozdělení jsme shledaly jako velmi důležité, protože děti spadající do různých intervalů se odlišně projevovaly v matematice. Bystré a nadprůměrně nadané děti měly tato specifika:

- Rády používaly osvojený algoritmus.
- Rády si „hrály“ s čísly, problémové úlohy jim činily potíže.
- Problémy nepromýšlely příliš do hloubky.

Mimořádně nadané děti se projevovaly odlišně:

- Nerady používaly osvojený algoritmus, snažily se najít vždy originální řešení. Úlohy, které pro ně byly jednoduché či algoritmické, je obtěžovaly.
- Vyživaly se v problémových úlohách. Problém rozebraly, našly řešení, které vždy nemuselo být správné.
- Nerady zapisovaly postup řešení, nebo neuměly zapisovat postup řešení, mnoho úloh (a to i těch náročnějších) řešily „z hlavy“.

¹ Děti s IQ nad 160 je v populaci velmi malé procento, avšak i my jsme se s takovými dětmi setkaly.

1.2/ Mýty o nadaných dětech

Slovní spojení „nadprůměrný výkon“, které je často užíváno ve spojení s nadanými dětmi, vyvolává v mnoha učitelích, rodičích a dalších dojem, že nadaní žáci se musí od raného dětství projevovat jednoznačně pozitivně v oblasti svého nadání. To nadaným dětem velmi ztěžuje situaci. Jejich projevy zdaleka nemusí být tak přímočaré, jak očekáváme, a nadání může zůstat skryté.

Některé projevy nadaných dětí, jako jsou neobvyklé zájmy, zvláštní vzorce chování aj., vedly k tomu, že se traduje mnoho názorů a předsudků o nadaných. Názory, resp. mýty o nadaných byly často dostatečným důvodem k tomu, aby se nadaní lidé obávali přiznat a využívat svůj potenciál (Laznibatová, 2007).

Mezi rodiči a pedagogy vzniklo mnoho mýtů, které nadaným nepomáhají, ale naopak jejich vývoj brzdí (Havigerová, Křováčková a kol., 2011, s. 10, Laznibatová, 2007):

- Nadaní dostali všechno bez námahy, zadarmo.
- Dokážou se uplatnit sami, bez pomoci a podpory okolí.
- Jsou od přírody samotáři, kteří nepotřebují ostatní, vystačí si sami.
- Vždy dokážou své schopnosti, vysoké nadání bez problémů ukázat, projevit.
- Musí být stejně dobří ve všech oblastech, např. ve všech předmětech ve škole, současně také ve sportu atd.
- Musí být přísněji hodnoceni než ostatní.
- Vzhledem ke svému nadání musí být zodpovědnější než jejich vrstevníci a zodpovídat i za ně.
- Je pro ně velmi příjemný pocit, když jsou ostatním dáváni za vzor.
- Nejdůležitější je pro ně vysoké nadání.
- Pouze nadaní rodiče mohou mít nadané děti.
- Nadané děti jsou výtvozem ambiciózních rodičů.
- Z nadaných dětí se automaticky stávají géniové.
- Nadaní nemohou mít žádné problémy.
- Nadaní jsou schopní a úspěšní v praktickém životě.
- Nadaní se rádi učí, rádi chodí do školy.
- Nadaní dávají okázale najevo, že jsou lepší než ostatní.
- Pokud se budeme nadaným věnovat, budou ještě domýšlivější.
- Nadaní jsou sociálně nepřízřusiví.
- Nadaní jsou poslušní, spořádaní a „umějí se chovat“.
- Nadaní jsou u učitelů oblíbení a rádi s nimi pracují.
- Učitelé sami dokážou identifikovat nadané.
- Soustřeďování nadaných do speciálních tříd / škol vede k elitářství.
- Nebudou-li nadaní žáci začleněni v běžné třídě / škole, nenaučí se základním sociálním dovednostem.
- Jedině v běžné třídě získá nadané dítě cit pro sociální rozdíly, handicap a naučí se pomáhat druhým.
- Nadaní se v běžné třídě rozvíjejí tím, že dělají pomocníka učiteli.
- Není vhodné dávat nadaným zvláštní úkoly během vyučování, oni si sami něco najdou ve volném čase, sami se rozvinou a prosadí.

U nadaných dětí je nezbytné znát jejich osobnost, vývoj jejich individuality, souvislosti a kontexty, v nichž se nacházejí, jejich silné a slabé stránky (Havigerová, Křováčková a kol., 2011).

Velmi důležitý je také vliv vrstevníků. Nadaní žáci touží zařadit se do třídního kolektivu, ale odlišnosti ztěžují jejich sociální zařazení. Významným činitelem v tomto procesu je učitel. Najde-li nadaný žák porozumění a podporu u autority, má výrazně usnadněný proces začleňování mezi vrstevníky (Havigerová, Křiváčková a kol. 2011, s. 18). Učitel, zejména v nižších ročnících, je nositelem postoje, který k nadanému dítěti zaujmou ostatní děti ve třídě.

1.3/ Identifikace nadaných dětí

Nadané děti bývají velmi často vnímány jako děti, které své nadání dávají jednoznačně najevo. Proto se očekává, že se budou projevovat jako elita a budou dosahovat cílů jako olympijští vítězové nebo housloví virtuózy.

Zodpovědnost za identifikování nadaných žáků nese škola, konkrétně učitel. Avšak také učitelé vnímají nadané žáky často jako ty, kteří dělají věci jednodušeji, rychleji a lépe ve srovnání s vrstevníky. Nadaní žáci se obvykle projevují jinak nežli spolužáci, avšak ne vždy v pozitivním slova smyslu. Učitel by měl být připraven na různé situace a projevy nadaných žáků, aby je mohl správně identifikovat.

Z pedagogického hlediska je dále velmi podstatné rozlišovat mezi dětmi bystrými a mimořádně nadanými. Bystré děti jsou šikovné, dobře se učí a vyhovují jim běžně používané výukové postupy a formy učení. Mimořádně nadané děti často nejsou uspokojovány běžnými postupy, vyžadují individuální přístup. Havigerová (2011) uvádí základní specifikace bystrého a nadaného dítěte, které učitelé mohou pomoci v identifikaci nadaných dětí (s. 84). Tabulka vychází z rozdílů mezi mimořádně nadaným a bystrým dítětem, které uvádí Cvetkovič-Ley (1995, cit. dle Laznibatová, 2007).

Bystré dítě	Mimořádně nadané dítě
Zná odpovědi	Klade otázky
Zajímá se	Je až neodbytně zvědavé
Má dobré nápady	Má neobvyklé nápady
Odpovídá na otázky	Zajímá se o detaily, rozpracovává, dokončuje
Je vůdcem skupiny	Je samostatné, často pracuje samo
Se zájmem naslouchá	Projevuje silné emoce, přitom naslouchá
Lehce se učí	Všechno již ví
Je oblíbené u vrstevníků	Má raději společnost starších dětí a dospělých
Chápe významy	Samostatně vyvozuje závěry
Vymýšlí úlohy a úspěšně je řeší	Iniciuje projekty
Přijímá úkoly a poslušně je vykonává	Úkoly přijímá kriticky, dělá jen to, co ho baví
Přesně kopíruje algoritmy úloh	Vytváří nová řešení
Dobře se cítí ve škole	Dobře se cítí při učení
Přijímá informace, vstřebává je	Využívá informace, hledá nové aplikace
Dobře si pamatuje	Kvalitně usuzuje
Je vytrvalé při sledování	Velmi pozorně sleduje
Je spokojené se svým učením a výsledky	Je velmi sebekritické

Učitel provádí prvotní identifikaci a doporučí návštěvu odborného pracoviště, které provede přesnou identifikaci. Testy měřící nadání velmi často vycházejí z úrovně IQ. Jako hranice mezi bystrostí a nadprůměrným nadáním byla mezinárodní organizací Mensa přijato IQ 130. Této hranice dosahují asi 2–3 % lidí z celkové populace (Fořtík, Fořtíková, 2007, s. 14). Je však potřeba zopakovat, že o nadání nerozhoduje pouze IQ, ale také například kreativita nebo některé charakterové a volní vlastnosti jedince. Inteligence je vrozená kvalita každého jedince. Experti se dnes shodují, že vedle genů je stejně důležité prostředí, ve kterém se jedinec nachází. Aby geny mohly být úspěšně využity, je potřeba podnětného prostředí, umožňujícího správný vývoj (Dweck, 2006, s. 5).

Učitel by měl být připraven na to, že se u nadaných dětí v důsledku jejich typických odlišností, jako jsou např. úzkostlivější povaha, socioemocionální konflikty s okolním prostředím aj., mohou projevovat různé problémy. Jsou to např. (Fořtík, Fořtíková, 2007, s. 36):

- **Nerovnoměrný vývoj.** Motorické schopnosti, zejména jemná motorika, často u nadaných dětí zaostávají za rozumovými schopnostmi. Děti mohou vědět, co chtějí udělat, vyrobit nebo nakreslit, ale jejich motorické schopnosti jim neumožňují stanoveného cíle dosáhnout. Důsledkem mohou být emocionální výlevy nebo frustrace.
- **Vrstevnické vztahy.** Nadané děti se snaží organizovat své okolí, což nemusí být spolužákům příjemné.
- **Rozsáhlá sebekritika.** Nadané děti mívají vysoké cíle a uvědomují si, jak obtížná cesta vede k jejich uskutečnění.
- **Perfekcionismus.** Nadané děti mají tendence plnit úkoly dokonale do posledního detailu, což je může v některých ohledech brzdít.
- **Vyhýbání se riskování.** Nadaní žáci vidí mnohá úskalí v řešení určitých situací. To, že se vyhýbají potenciálnímu problému, může vyústit v podvýkonnost.
- **Multipotencialita.** Nadané děti nežrádka vynikají ve více oblastech a mohou se angažovat v různorodých aktivitách až do neúnosné míry. To může zásadně ovlivňovat chod rodiny.
- **Dvojí výjimečnost.** Fyzické handicapy mohou způsobovat sociální a emocionální problémy. Nadané děti s postižením inklinují k sebehodnocení na základě svého postižení, nikoliv podle nadání, které by mohlo tyto handicapy do jisté míry kompenzovat.

1.4/ Podvýkonnost

Podvýkonnými dětmi rozumíme nadané děti, které dlouhodobě školsky neprospívají a potřebují speciální péči.

Podvýkonnost nemusí být vždy znakem neschopnosti nebo znevýhodnění. Může se též jednat o projev malého sebevědomí, touhy zapadnout do skupiny vrstevníků, nenaplnění očekávání od školního vzdělávání.

Negativní indikátory podvýkonnosti můžeme rozdělit do tří kategorií (Thomson, 2006):

- **Nižší výkon** – výkon je nižší než intelektový potenciál, žáci odvádějí málo práce nebo téměř žádnou, na které by byla patrná jejich mimořádná schopnost v určité oblasti.
- **Odlišné chování** – žáci mohou být agresivní, introvertní nebo vyrušující. Jejich skutečná schopnost nemusí být jednoduše identifikovatelná kvůli negativnímu chování, které maskuje jejich potenciál.
- **Znevýhodnění** – žáci mohou trpět strachem ze selhání, nízkým sebevědomím nebo tlakem na přizpůsobení a často potřebují podporu při poznávání obtíží spojených se znevýhodněním a pocitem méněcennosti. Může se jednat o žáky pocházející ze znevýhodňujícího prostředí.

Základní znaky společné mnoha nadaným žákům, kteří se projevují jako podprůměrní, lze rozdělit do charakteristik učení a chování. Jedná se zejména o následující (Thomson, 2006):

Charakteristiky nadaného žáka

- Má velmi vysoké IQ, avšak snaží se o přízeň vrstevníků, proto schopnosti zatajuje.
- Má chabé pracovní návyky, nedostatek snahy, nedokončuje práci.
- Obecně má malou schopnost koncentrace, ale dokáže se velmi zaujmout konkrétními činnostmi.
- Odmítá úlohy zadané učitelem, není schopen odpovídat na učitelova zadání.
- Není motivován výsledky, pouze strachem ze selhání, v nových podmínkách se nesnaží o pokusy řešení.
- Je frustrován nečinností a nedostatkem podnětů.
- Má nedostatek sebeúcty, negativní přístup k sobě a vrstevníkům.
- Stanovuje si nerealisticky vysoké cíle.

- Projevuje cynický přístup a emocionální frustrace.
- Jeho nadání je potlačováno nedostatkem kreativních příležitostí.
- Často o všem diskutuje, ale má malou dovednost naslouchat.
- Je sociálně izolovaný, ale navenek předstírá, že si vystačí sám.
- Je citlivý na kritiku, ze svých neúspěchů obviňuje druhé.
- Používá humor v nevhodných situacích.

Charakteristiky chování

- Nedodržuje pravidla třídy, je konfrontační.
- Projevuje nedostatek pozornosti, ignoruje potřeby druhých.
- Zabráňuje druhým zabrat se do učení, vyrušuje.
- Kvůli chování si může znepřátelit spolužáky.
- Může se jevit znuřený, frustrovaný, tvrdohlavý a nespolupracující.
- Může se zdát, že zabíjí čas a je duchem nepřítomný.
- Nemá trpělivost se spolužáky, kteří přemýšlí pomaleji.
- Má tendence vznášet námitky a ptát se indiskrétně.
- Nekomunikuje dostatečně se spolužáky či učitelem.
- Sní za bílého dne.
- Preferuje samostatnou práci a věnuje se vlastním zájmům.
- Často nesplní zadaný úkol.
- Nechápe, proč ostatní nerozumí jeho pokusům o humor.
- Nechápe, proč ostatní neberou vážně jeho myšlenky a pocity.
- Cítí se omezený restrikcemi, pracuje vlastním způsobem a tempem.

1.5/ Dvojí výjimečnost

Dvojí výjimečnost je kombinace nadání a určitého postižení či specifických potíží, které mohou ovlivnit učení. Sociální a behaviorální obtíže do této kategorie spadají pouze jako část jiných podmínek ovlivňujících učení (Thomson, 2006, s. 26).

V současné době se setkáváme se zvyšujícím se tlakem na inkluzivní vzdělávání, a proto se každý učitel pravděpodobně setká s dětmi s dvojí výjimečností. Jedná se o nadané děti s vývojovými poruchami – dyslexií, dyspraxií, autismem, příp. Aspergerovým syndromem, ADHD, poruchami řeči. Tyto děti vyžadují velmi individuální přístup a velkou trpělivost od učitele.

Velice náročné je pro učitele nadání v kombinaci s tzv. Aspergerovým syndromem². Děti s Aspergerovým syndromem mohou mít problémy v sociální oblasti, vykazují neobvykle zvýšený zájem o určitá témata, mají neobvyklý profil schopností s pozoruhodnou dlouhodobou pamětí, výjimečnou koncentrací v oblastech jejich zájmu, originální a nezvyklé metody řešení problémů. Zdánlivě nemají zájem o komunikaci s druhými, přitom většina lidí s Aspergerovým syndromem po kontaktu s nimi touží. Problémem je to, že neví, jak v daných situacích reagovat. Mnohdy proto reagují nevhodným způsobem (zahlcují druhé lidi svým tématem, křičí apod.) (Bělohávková, 2013, s. 9). Jestliže se jim kontakt s druhými opakovaně nezdaří, cíleně ho již nevyhledávají, nebo se mu dokonce úmyslně vyhýbají. Dětem je potřeba pomoci nácvikem sociálních dovedností, zejména v oblastech emocí, verbální a neverbální komunikace, komunikace a vztahů s druhými lidmi.

² Aspergerův syndrom je charakterizován následovně (Preissmann 2000, s. 243): „Porucha určité nozologické validity charakterizovaná stejným typem kvalitativních poruch vzájemné sociální interakce, typických pro autismus, spolu s omezeným stereotypem, opakujícím se repertoárem zájmů a činností. Primárně se liší od autismu tím, že se u této poruchy nevyskytuje celkové zpoždění nebo retardace řeči ani kognitivního vývoje.“